Universidade de Aveiro Departamento de Matemática

2012

Rita Alexandra Pires Estrela

Jogos Combinatórios e Jogos de Soma Nula

Universidade de Aveiro Departamento de Matemática
2012

Rita Alexandra Pires Estrela

Jogos Combinatórios e Jogos de Soma Nula

Dissertação apresentada à Universidade de Aveiro para cumprimento dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática e Aplicações, com especialização em Matemática Empresarial e Tecnológica realizada sob a orientação científica do Prof. Doutor Rui Filipe Alves Silva Duarte e da Prof.ª Doutora Rita Isabel Gonçalves Simões, Professores Auxiliares do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro.

Dedico este trabalho ao meu amigo Tatu por, simplesmente, ter feito parte do meu mundo.

o júri / the jury

presidente / president

Doutor Manuel António Gonçalves Martins

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro

Doutor Samuel António de Sousa Dias Lopes

Professor Auxiliar da Universidade do Porto

Doutor Rui Filipe Alves Silva Duarte

Professor Auxiliar da Universidade de Aveiro (Orientador)

Doutora Rita Isabel Gonçalves Simões

Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro (Co-Orientadora)

agradecimentos

Ao Professor Doutor Rui Duarte e à Professora Doutora Rita Simões, pelo entusiasmo e amizade com que sempre me transmitiram os ensinamentos, conselhos, sugestões e críticas, bem como por todas as longas horas de trabalho e leitura crítica, pela atenção, pelas palavras de incentivo e disponibilidade.
Aos meus pais, pelo apoio, paciência, motivação e amizade.
À mana, pelas “vírgulas” que acrescentou e pela amizade que nos une.
A todos os meus amigos e colegas que, de alguma forma, contribuíram para a realização deste projeto.

Palavras-chave Teoria dos jogos, jogo, jogo combinatório, jogo de soma nula, estratégia.

Resumo A teoria dos jogos pretende analisar situações competitivas que envolvem interesses conflituosos. Deste modo contempla vários tipos de jogos com características específicas. Neste trabalho são estudados os conceitos da teoria dos jogos como ferramenta à estratégia dos jogadores em alguns jogos combinatórios e em jogos de soma nula.

Os jogos combinatórios caracterizam-se por serem de decisões alternadas, de informação completa, onde não há interferência do acaso, são imparciais e terminam sempre com a vitória de um dos jogadores. Em alguns casos é fácil encontrar uma estratégia vencedora, como no jogo do Nim e em algumas das suas variantes. Além destes, ainda são abordados os jogos de Ramsey e Sperner.

Os jogos de soma nula são exemplos de situações em que os jogadores têm interesses totalmente opostos. Cada tomada de decisão visa maximizar os ganhos de um dos jogadores (e, consequentemente minimizar as perdas do outro jogador). Desta forma, mostra-se que, através de matrizes de *payoffs*, é fácil encontrar estratégias vencedoras, sejam elas puras ou mistas.

Keywords Game theory, game, combinatorial game, zero-sum game, strategy.

Abstract

The game theory intends to analyze competitive situations involving conflicts of interest. In this sense, it includes various types of games with specific characteristics. In this work, concepts of game theory are studied as a tool to the strategy of players in some combinatorial games and zero-sum games.

The combinatorial games are characterized by alternating decisions, complete information, where there is no interference of random, are neutral and always end with the victory of one player. In some cases it is easy to find a winning strategy, as in the game of Nim and in some of its variants. In addition, the Ramsey and Sperner games are also studied.

The zero-sum games are examples of situations where players have totally opposite interests. Each decision making seeks to maximize the gains of one player (and hence to minimize the losses of another player). So, through *payoff* matrices, it is shown that it is easy to find winning strategies, whether they are pure or mixed.

Conteúdo

Introdução

Em todas as culturas, em todas as épocas, as pessoas jogam. Pensa-se até que os jogos podem ter desempenhado um papel evolutivo relevante. Ao tornar agradável a atividade intelectual, talvez o jogo facilite a aprendizagem das regras do pensamento válido. [22]

Esta dissertação tem como objetivo evidenciar os conceitos da teoria dos jogos como ferramenta à estratégia dos jogadores, em determinado tipo de jogos, tendo em vista a sua aplicação para a formulação de estratégias e na procura de uma jogada lógica e racional do posicionamento estratégico que leve à vitória.

A teoria dos jogos foi desenvolvida com a finalidade de analisar situações competitivas que envolvem interesses conflituosos. Nas situações estudadas, existem dois ou mais jogadores com objetivos diferentes, sendo que a ação de cada um influencia, mas não determina completamente o resultado do jogo. Além disso, admite-se que cada jogador saiba os objetivos do seu adversário, o que caracteriza um agente racional. Assim, trata-se de um método de análise de situações de conflito e de cooperação que dependem do comportamento estratégico, onde as ações dos agentes são parcialmente dependentes do que os outros agentes poderão fazer. Conflito, porque os diferentes agentes têm, em geral, interesses diferentes, e cooperação, pois vários participantes juntos podem coordenar as suas estratégias para obter situações de jogo com melhores ganhos que os outros.

A teoria dos jogos procura assim explicar como é que as pessoas interagem e como tomam decisões, tanto em jogos simples como em conflitos políticos e económicos, mostrando-se assim uma excelente ferramenta para o desenvolvimento da personalidade e da inteligência.

Um jogo pode ser definido como sendo uma atividade física ou mental organizada por um sistema de regras que definem a perda ou o ganho, ou seja, trata-se, em termos económicos, de uma situação definida por interesses competitivos, em que cada um procura maximizar os seus ganhos. Sendo um jogo uma situação de interação estratégica entre diversos agentes, em todas as situações de competição, os elementos básicos a considerar são: os jogadores e as suas estratégias, resultados e ganhos, e regras.

Num jogo existem:

- **Jogadas**, que não são mais do que formas segundo as quais o jogo progride; podem ser alternadas entre os jogadores de uma forma especificada ou ocorrer simultaneamente; uma jogada consiste numa decisão de um dos jogadores ou num resultado de um evento probabilístico.

- **Estratégias**, que são uma lista das escolhas para um jogador, onde estão previstas todas as possíveis situações que o jogador poderá enfrentar; cada estratégia escolhida por um jogador, determina a situação do jogo.

  Se os jogadores escolhem uma única estratégia em cada jogada, então esta denomina-se **estratégia pura**. Quando cada jogador escolhe uma distribuição de probabilidades sobre as suas estratégias puras, diz-se um jogo de **estratégias mistas**.

Uma **estratégia ótima** é aquela que coloca o jogador na melhor posição possível. A estratégia ótima envolve os ganhos máximos possíveis para o jogador.

- ***Payoff***, que é o ganho de cada jogador após cada jogada, ou seja, após cada escolha de estratégia.

Assim como são importantes os jogadores, as suas ações, resultados e *payoffs*, também as regras formais e informais são importantes para o comportamento entre os competidores.

A primeira parte deste trabalho trata de apresentar alguns exemplos de jogos combinatórios e algumas propriedades dos mesmos ao nível dos conceitos matemáticos que lhes estão associados, numa perspetiva de determinar uma estratégia vencedora. Em teoria, todos os jogos combinatórios podem ser facilmente resolvidos por um algoritmo simples que analisa por completo a sua árvore de opções. São jogos que não dependem da sorte, mas oferecem alternativas para que os jogadores possam escolher qual a melhor linha de ação que devem adotar para atingir um resultado esperado, tendo em conta o que a outra parte fará.

A segunda parte cabe à abordagem matemática das soluções de jogos de soma nula. São focadas situações em que os interesses dos jogadores são totalmente opostos. Na terminologia da teoria dos jogos, este tipo de situações competitivas são chamadas de jogos de soma nula, o que um ganha o outro perde. Os jogos de soma nula podem ser pensados como um extremo de conflito puro, pois para um jogador ganhar o outro tem necessariamente de perder. Neste sentido, a referência ao teorema Maximin-minimax pressupõe a utilização de estratégias que visem maximizar os ganhos e minimizar as perdas. O decisor racional procurará um modo de atuação que lhe dê o melhor ganho possível na pior situação, ou seja, o melhor ganho admitindo que o adversário fará o melhor contra movimento. O encontro das estratégias ótimas de cada jogador com as dos adversários é um ponto de equilíbrio. Nos casos em que este ponto não existe, veremos que o jogo ótimo deve selecionar estratégias de acordo com as probabilidades obtidas a partir da matriz dos *payoffs*, aplicando estratégias mistas.

Capítulo 1

Jogos combinatórios

1.1 Introdução

A teoria dos jogos combinatórios é um ramo da matemática aplicada (e da teoria computacional) que se centra em encontrar a solução dos jogos combinatórios.

Encontrar a solução ou "resolver" um jogo combinatório significa determinar quem o vence, supondo que ambos os jogadores jogam sempre da melhor forma possível,[1] e qual a estratégia vencedora.

Os jogos combinatórios são jogos sequenciais com as seguintes características:

- *dois participantes*: os dois jogadores efetuam alternadamente as suas jogadas;

- *informação perfeita*: ambos os jogadores possuem, em todos os momentos, informação completa sobre a situação;

[1] Dizemos que um jogador "joga da melhor forma possível" se as suas jogadas visarem sempre a vitória.

- *determinístico*: não há interferência do acaso, ou seja, não é jogo de sorte;
- *imparcialidade*: em cada posição de jogo, o acesso é igual para os dois jogadores;
- *finitude*: o jogo deve terminar após um número finito de movimentos e com a vitória de um dos jogadores.

Observemos que uma das principais características dos jogos combinatórios, a impossibilidade de empate, é a garantia da existência de uma estratégia vencedora para algum dos jogadores.

Há uma grande quantidade de jogos combinatórios clássicos, tais como jogo do Nim, jogo de Ramsey, jogo de Sperner, hex, semáforo, ...

Neste capítulo, iremos apresentar a solução para o jogo do Nim e provaremos que os jogos de Ramsey e de Sperner admitem sempre um vencedor.

1.2 Jogo do Nim

O jogo do Nim é um jogo para dois jogadores no qual estes retiram, alternadamente, peças que estão dispostas em pilhas. É um jogo bastante simples e tem várias versões e poucas regras. Pode ser jogado com números, traços, fósforos, moedas, botões, sementes,...

1.2.1 História do jogo

A origem do jogo do Nim é desconhecida, colocando-se a hipótese de ter origem chinesa, inspirado no antigo jogo de apostas chinês chamado *Fan Tan*. [3]

Mesmo não se sabendo (com certeza) a origem do nome Nim, em inglês arcaico significa *apanhar* e em alemão "*nimm*" significa *tirar*. Além disso, Nim invertido (numa rotação de 180°), *win*, significa *vencer*. [8]

Em 1940 foi patenteada nos EUA uma máquina de nome "*Nimatron*" e em 1951, no "Festival Britânico", foi exibido um robô chamado "*Nimrod*", que serviam exclusivamente para jogar Nim. [11]

De acordo com Bouton [3], foi o primeiro jogo a ser estudado matematicamente. Em 1901, este matemático apresentou uma teoria para a estratégia vencedora do jogo. Esta teoria está ligada, de modo surpreendente, com a aritmética dos números naturais no sistema binário de numeração.

Apesar de bastante simples, o Nim é um jogo que requer raciocínio matemático para que se possa elaborar uma estratégia vencedora. O jogo do Nim é um dos exemplos mais importantes dos jogos imparciais de estratégia.

1.2.2 Regras do jogo

Por tratar-se de um jogo com diversas variantes, podemos encontrar as mais diversas regras quanto à quantidade de peças utilizadas no jogo, ao número de pilhas e à quantidade de peças por pilha. Também, conforme a modalidade escolhida, pode ou não determinar-se um limite máximo de peças que podem ser retiradas em cada jogada.

Iremos, numa primeira parte, estudar a variante mais clássica. O Nim é um jogo para dois jogadores que se joga com pilhas de peças. Em cada jogada, cada jogador escolhe uma pilha e retira dela o número de peças que desejar. Note-se que um jogador só pode tirar peças de uma única pilha e o jogador tem de tirar pelo menos uma peça. Ganha o jogador que retirar a última peça.

1.2.3 A matemática do jogo

"– *Conheço um jogo em que eu ganho sempre.*

– *Se você ganha sempre não é um jogo.*

– *É um jogo, mas eu ganho sempre.*"

Este é um diálogo entre duas personagens do filme "*O ano passado em Marienbad*"[2] de *Alain Resnais* que descreve bem um facto interessante no jogo do Nim que permite fazer uma análise matemática. Neste tipo de jogo é sempre possível (mediante determinada condição) encontrar uma certa configuração das peças de modo a que o adversário não possa ganhar, independentemente das jogadas que ele faça.

Quando se analisa um jogo do Nim, surge o conceito de **estratégia vencedora**, isto é, um conjunto de condições que permitem a um dos jogadores decidir a cada momento como deve jogar, tendo em conta as jogadas realizadas pelo seu adversário, como fim de alcançar a vitória, seja qual for a jogada do oponente. No entanto, "quando se conhece a estratégia vencedora de um jogo, este deixa de ser lúdico e transforma-se num problema resolvido". [8]

A determinação de uma estratégia vencedora que permite resolver qualquer jogo do Nim é uma das melhores provas de intervenção da matemática na análise de jogos.

Chamamos $V-$**posição**[3] a uma configuração de peças que permite ao jogador que a deixou vencer o jogo independentemente das jogadas que o adversário faça. Se um jogador deixa uma $V-$posição de peças, então o seu adversário, no seu próximo movimento, seja ele qual for, não conseguirá deixar uma $V-$posição. Além disso, após o movimento do adversário, o jogador poderá novamente conseguir deixar uma nova $V-$posição e continuar o jogo.

[2] "*L'année dernière à Marienbad*" (1961).

[3] V de vitória.

A uma configuração que não é V–posição, chamamos D**–posição**.[4]

Se considerarmos um jogo do Nim com n pilhas em que, num determinado instante do jogo, a pilha i tem p_i peças, com $i \in \{1, \ldots, n\}$, a configuração das peças nesse instante é representada por $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. Note-se que o jogo termina quando um jogador conseguir obter a configuração $(0, 0, \ldots, 0)$, denominada **posição terminal**.

Podemos estabelecer as seguintes propriedades:

Proposição 1.2.1. *Dado um jogo (do Nim) jogado da melhor forma possível, então:*

a) a posição terminal $(0, 0, \ldots, 0)$ *é uma V–posição.*

b) a partir de uma qualquer V–posição, todas as jogadas originam uma D–posição.

c) a partir de uma qualquer D–posição existe, pelo menos, uma jogada que origina uma V–posição.

Vamos analisar alguns casos particulares da variante clássica do jogo do Nim, atendendo ao número de pilhas, para descobrir as estratégias que levam às V–posições e, consequentemente, à vitória.

Jogo do Nim com uma pilha.

Vamos começar por analisar um jogo do Nim com uma pilha com uma restrição nas regras do jogo da variante clássica: em cada jogada, cada jogador só pode retirar até um máximo de peças fixo, não sendo esse máximo o número de peças total da pilha (caso contrário, o jogo seria trivial).

[4] D de derrota.

Exemplo 1.2.2. Consideremos um jogo do Nim com uma pilha com 20 peças e vamos assumir que só podemos tirar, no máximo, 2 peças.

É trivial verificar que o jogador que deixar 3 peças na pilha vai ganhar. Analisando o jogo, é fácil também verificar que se um jogador deixar 6 peças também ganha e, em geral, um jogador que deixar na pilha um número de peças múltiplo de 3 ganha a partida.

Assim, a estratégia vencedora poderá ser formulada da seguinte forma: o primeiro jogador poderá ganhar sempre se tirar 2 peças na primeira jogada e deixar depois sempre um múltiplo de 3 (se o segundo jogador tirar 1 peça, o primeiro tira 2 e vice-versa). Assim, neste jogo, o primeiro jogador está em vantagem, uma vez que existe uma estratégia vencedora para ele. $\diamondsuit$

A alteração do número inicial de peças pode modificar em parte a estratégia vencedora e até mesmo o jogador que está em vantagem. De facto, uma vez que a V–posição se obtém deixando um número de peças que seja múltiplo de 3, então basta efetuar a divisão inteira do número de peças inicial por 3 e ver qual é o resto dessa divisão:

- se for 2, o primeiro jogador ganha se retirar 2 peças na primeira jogada;

- se for 1, o primeiro jogador também ganha, mas agora tirando uma peça na primeira jogada;

- se for 0 (o número de peças é divisível por 3), então o segundo jogador ganha, tirando 2 peças, se o primeiro tirou 1, ou vice-versa. Neste caso, o primeiro jogador nunca consegue deixar um número de peças múltiplo de 3.

Generalizando, consideremos um jogo do Nim com uma pilha com m peças, onde só é possível retirar n peças em cada jogada, com $n \in \mathbb{N}$ e $1 \leq n < m$.[5] Tal como foi visto, a estratégia vencedora consiste em efetuar a divisão inteira de m por $n+1$ e determinar o resto da divisão r:

- se $r = 0$, então o segundo jogador consegue obter uma V–posição deixando um número múltiplo de $n+1$ de peças; para tal, em cada jogada, se o primeiro jogador retirar p peças, com $0 < p < n+1$, o segundo deverá retirar $n+1-p$ peças;

- se $0 < r < n+1$, então o primeiro jogador consegue obter uma V–posição se na primeira jogada retirar r peças deixando um número múltiplo de $n+1$ de peças e, desta forma, aplicar a estratégia vencedora do caso anterior.

Exemplo 1.2.3. Consideremos um jogo do Nim com uma pilha com 31 peças e que em cada jogada, no máximo, podemos retirar 5 peças.

A estratégia vencedora é deixar sempre na pilha um número de peças que seja múltiplo de $5+1=6$. Assim, como o resto da divisão inteira de 31 por 6 é 1, o primeiro jogador consegue obter uma V–posição se retirar 1 peça. Se, depois, o segundo jogador retirar, por exemplo, 4 peças, o primeiro jogador consegue novamente uma V–posição se retirar $5+1-4=2$. De facto, assim a pilha fica com 24 peças que é múltiplo de 6. $\diamondsuit$

Jogo do Nim com duas pilhas.

No caso do jogo do Nim com duas pilhas também se consegue encontrar uma estratégia vencedora.

[5]Note-se que se $n = m$, o jogo é trivial e ganha o primeiro jogador, retirando todas as peças.

Basta retirar da pilha com maior número de peças, o número necessário para igualar as pilhas e, a partir daí, copiar sempre a jogada do adversário, de forma a deixar sempre o mesmo número de peças nas duas pilhas. Este tipo de estratégia, em que um jogador repete as jogadas do adversário, é conhecida por *Tweedledum–Tweedledee* [23].

Assim, num jogo do Nim com duas pilhas com o mesmo número de peças, ganha o segundo jogador desde que repita todas as jogadas feitas pelo adversário (o primeiro jogador). Quando as duas pilhas têm um número de peças diferentes, ganha o primeiro jogador se na primeira jogada igualar o número de peças em cada pilha e, depois disso, seguir a estratégia *Tweedledum–Tweedledee.*

Exemplo 1.2.4. Consideremos um jogo do Nim com duas pilhas, uma com 4 peças e outra com 6 peças. O primeiro jogador deve retirar 2 peças da segunda pilha de modo a igualar o número de peças em cada pilha. A partir daí, o que o adversário fizer numa pilha, o jogador faz na outra. $\diamondsuit$

Assim, para um jogo do Nim com duas pilhas, podemos formalizar a estratégia vencedora:

Lema 1.2.5. *[25] Uma configuração (n, m) é V–posição se e só se $n = m$.*

Jogo do Nim com três ou mais pilhas.

No caso de três ou mais pilhas a análise não é tão simples. É necessário introduzir novos conceitos para determinar a estratégia vencedora, conceitos esses que também se podem aplicar nos casos de uma ou duas pilhas.

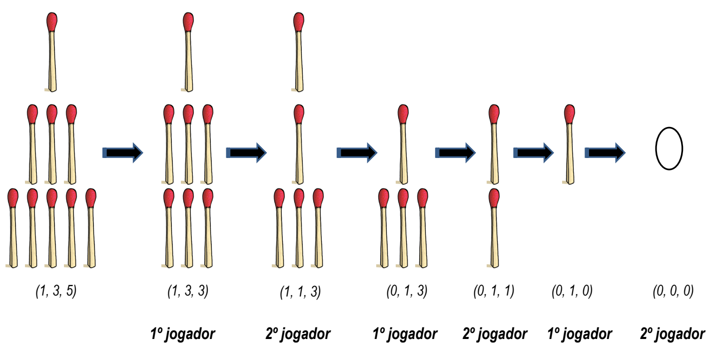
Comecemos por analisar o jogo do Nim com três pilhas. Iremos ver com um exemplo simples que não convém a nenhum dos dois jogadores efetuar uma das seguintes operações:

a) deixar duas das pilhas com o mesmo número de peças (e a restante pilha não vazia);

b) eliminar todas as peças de uma pilha, caso as restantes pilhas tenham um número de peças diferentes (entre si).

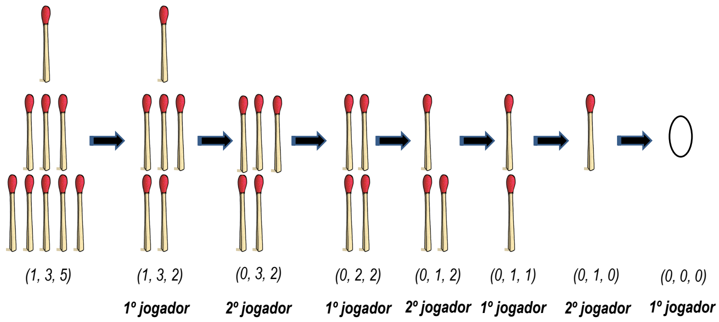
De facto, se um jogador efetuar a jogada descrita em a), o outro elimina as peças da pilha restante e ganha o jogo, fazendo sempre uma jogada simétrica à do seu adversário. Estamos num dos casos do jogo do Nim com duas pilhas. Por outro lado, se um jogador efetuar a jogada descrita em b), então o outro jogador retira as peças da pilha que tem mais, deixando duas pilhas com igual quantidade de peças e ganha o jogo, jogando como no caso anterior. E, portanto, ganha o jogador que conseguir forçar o adversário a efetuar uma das duas jogadas "proibidas", anteriormente enunciadas.

Exemplo 1.2.6. Consideremos um jogo do Nim com a configuração inicial $(1, 3, 5)$. Suponhamos que o primeiro jogador deixa duas pilhas com o mesmo número de peças. Então um possível jogo é:



E, portanto, ganha o segundo jogador.

Vejamos agora um exemplo de um jogo em que um dos jogadores força o adversário a jogar uma das jogadas "proibidas".



Assim, foi o primeiro jogador que ganhou o jogo, pois obrigou o adversário a eliminar uma pilha ou a igualar duas pilhas com uma ou duas peças. ♢

É evidente que a estratégia anterior é demasiado concreta e dificilmente generalizável para um número qualquer de pilhas. No entanto, é possível determinar uma estratégia vencedora geral que sirva para qualquer número de pilhas e de peças em cada pilha, utilizando o sistema binário[6] e outros conceitos.

A técnica passa por escrever o número de peças de cada pilha no sistema binário e colocar essa representação binária de modo a que os respetivos dígitos fiquem alinhados em colunas.

É fácil verificar que, em cada jogada, um dígito de uma das colunas será alterado. Iremos provar que se, na configuração inicial, a soma de todos os dígitos de cada coluna for par, existe uma estratégia vencedora para o segundo jogador. Basta para isso que ele deixe todas as colunas com soma par (algo que o primeiro jogador não pode fazer).

No caso de, pelo menos, uma coluna ter soma ímpar, a estratégia vencedora será para o primeiro jogador, que deve na sua primeira jogada deixar todas as colunas com soma par.

[6]No Apêndice A é feita uma breve abordagem a este sistema.

Exemplo 1.2.7. Consideremos um jogo do Nim com a configuração inicial $(1, 3, 5)$. De acordo com a técnica anterior, obtemos:

1	0	0	1
3	0	1	1
5	1	0	1
Soma	1	1	3

Todas as colunas têm soma ímpar, logo existe uma estratégia vencedora para o primeiro jogador. Este deve jogar de modo a deixar todas as colunas com soma par. Assim, a única possibilidade consiste em retirar três peças da terceira pilha, ou seja, passar 5 para 2. Assim,

1	0	0	1
3	0	1	1
2	0	1	0
Soma	0	2	2

Agora todas as colunas têm soma par, pelo que, qualquer que seja a jogada do segundo jogador, vai deixar uma das colunas com soma ímpar e, portanto, o primeiro jogador pode voltar a deixá-las todas com soma par até à posição terminal. $\diamondsuit$

Uma V–posição pode ser formalizada introduzindo o conceito de soma–Nim, baseada no sistema binário.

Seja $x \in \mathbb{N}_0$. Se $x = x_m 2^m + x_{m-1}2^{m-1} + \cdots + x_1 2 + x_0$, com $x_i \in \{0, 1\}$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, então escrevemos $x = (x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1, x_0)_2$. A cada x_i, com $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$, chamamos **dígitos**.

Dados dois números inteiros não negativos $x = (x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1, x_0)_2$ e $y = (y_m, y_{m-1}, \ldots, y_1, y_0)_2$, a **soma–Nim** de x com y, denotada por $x \oplus y$, é dada por $z = x \oplus y$, onde $z = (z_m, z_{m-1}, \ldots, z_1, z_0)_2$, com $z_k = x_k +_2 y_k$, para todo $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$, e

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

Teorema 1.2.8. *O conjunto dos números inteiros não negativos munido da soma–Nim é um grupo abeliano onde cada elemento é inverso de si próprio.*

A demonstração pode ser encontrada no Apêndice A.

Os próximos dois resultados reescrevem a Proposição 1.2.1 em termos da soma–Nim.

Lema 1.2.9. *[3] Seja $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ uma configuração tal que*

$$p_1 \oplus p_2 \oplus \cdots \oplus p_n = 0.$$

Então, qualquer jogada nessa configuração, origina uma configuração cuja soma–Nim é não nula.

Demonstração. Seja $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ tal que $p_1 \oplus p_2 \oplus \cdots \oplus p_n = 0$. Seja ainda $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ a configuração obtida após uma jogada e suponhamos que a jogada é feita sobre a k-ésima pilha. Então $p_i = q_i$, para todo $i \neq k$, e $q_k < p_k$. Logo a soma–Nim da configuração obtida é:

$$\begin{aligned}
q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_n &= p_1 \oplus \cdots \oplus p_{k-1} \oplus q_k \oplus p_{k+1} \oplus \cdots \oplus p_n \\
&= p_1 \oplus \cdots \oplus p_{k-1} \oplus (q_k \oplus p_k \oplus p_k) \oplus p_{k+1} \oplus \cdots \oplus p_n \\
&= (p_1 \oplus \cdots \oplus p_{k-1} \oplus p_k \oplus p_{k+1} \oplus \cdots \oplus p_n) \oplus (q_k \oplus p_k) \\
&= 0 \oplus (q_k \oplus p_k) \\
&= q_k \oplus p_k \neq 0.
\end{aligned}$$

□

Lema 1.2.10. *[3] Seja $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ uma configuração tal que $p_1 \oplus p_2 \oplus \cdots \oplus p_n \neq 0$. Então, existe pelo menos, uma jogada nessa configuração que origina uma configuração cuja soma–Nim é nula.*

Demonstração. Seja $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$ uma configuração tal que $p_1 \oplus p_2 \oplus \cdots \oplus p_n \neq 0$. Seja ainda $s = p_1 \oplus p_2 \oplus \cdots \oplus p_n$ e suponhamos que $s = (s_m, s_{m-1}, \ldots, s_1, s_0)_2$.

Consideremos d tal que $s_d = 1$ e se $s_k = 1$ então $d \leq k$, isto é, d é o dígito 1 mais à esquerda da representação binária de s. Escolha-se um j tal que o d-ésimo dígito de p_j é também 1. Repare-se que j existe uma vez que o dígito s_d é a soma–Nim dos d-ésimos dígitos de cada p_i. Defina-se $q_j = s \oplus p_j$. Então $q_j < p_j$. De facto, todos o dígitos à esquerda de d são os mesmos em p_j e q_j e são nulos. Além disso, o d-ésimo dígito (em q_j) diminui de 1 para 0. Ao retirar $p_j - q_j$ peças da pilha j obtemos uma configuração que anula a soma–Nim. Note-se que se $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ for a configuração obtida após essa jogada então $q_i = p_i$, para todo $i \neq j$, $q_j = s \oplus p_j$ e

$$q_1 \oplus q_2 \oplus \cdots \oplus q_n = s \oplus p_j \oplus q_j = s \oplus p_j \oplus (s \oplus p_j) = 0.$$

□

Esta demonstração permite-nos estabelecer uma regra prática para a determinação de uma V–posição na tabela com a configuração em sistema binário: escolher a coluna mais significante (ou seja, a coluna mais à esquerda) com um número ímpar de dígitos 1 e eliminar peças de uma das pilhas correspondentes a esses dígitos, de modo a que a soma de cada coluna seja 0. Existe uma V–posição por cada dígito 1 da coluna escolhida e, claramente, existe um número ímpar de V–posições. [9]

Exemplo 1.2.11. Consideremos o jogo do Nim com a configuração inicial $(7, 5, 3, 2)$. Então

7	1	1	1
5	1	0	1
3	0	1	1
2	0	1	0
soma–Nim	0	1	1

A coluna mais significante com um número ímpar de dígitos 1 é a segunda. Temos exatamente três possíveis V–posições:

- retirar da primeira pilha 3 peças:

4	1	0	0
5	1	0	1
3	0	1	1
2	0	1	0
soma–Nim	0	0	0

- retirar da terceira pilha todas as peças:

7	1	1	1
5	1	0	1
0	0	0	0
2	0	1	0
soma–Nim	0	0	0

- retirar da última pilha 1 peça:

7	1	1	1
5	1	0	1
3	0	1	1
1	0	0	1
soma–Nim	0	0	0

$\diamondsuit$

O próximo resultado estabelece uma caracterização para as V–posições de um jogo do Nim.

Teorema 1.2.12 (Teorema de Bouton). *[22] A configuração* $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ *é uma* V*–posição se, e somente se,*

$$p_1 \oplus p_2 \oplus \cdots \oplus p_n = 0.$$

Demonstração. Iremos ter por base a Proposição 1.2.1. Qualquer configuração ou é V–posição ou é D–posição. Seja $\mathcal{V}$ o conjunto de todas as configurações com soma–Nim nula e seja $\mathcal{D}$ o conjunto todas as configurações cuja soma–Nim é não nula. Então:

a) A posição terminal pertence a $\mathcal{V}$; de facto, sendo a posição terminal $(0, 0, \ldots, 0)$ então $0 \oplus 0 \oplus \cdots \oplus 0 = 0$.

b) Mostremos que, dada uma configuração de $\mathcal{V}$, qualquer jogada nessa configuração transforma-a numa configuração de $\mathcal{D}$.

   Seja então $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathcal{V}$. Sem perda de generalidade, suponhamos que são retiradas peças da primeira pilha e obtemos a configuração $(p'_1, p_2, \ldots, p_n)$. Se $p_1 \oplus p_2 \oplus \cdots \oplus p_n = 0 = p'_1 \oplus p_2 \oplus \cdots \oplus, p_n$ então, pela lei do corte, $p_1 = p'_1$, o que é absurdo. Logo $(p'_1, p_2, \ldots, p_n) \neq 0$ e, portanto, $(p'_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathcal{D}$.

c) Resta mostrar que, dada uma configuração de $\mathcal{D}$, existe sempre uma jogada que a transforma numa configuração de $\mathcal{V}$.

   Vejamos qual é essa jogada: tal como foi feito na demonstração do Lema 1.2.10, na tabela da soma–Nim, escolha-se a coluna mais significante com um número ímpar de dígitos iguais a 1.

Escolha-se uma pilha onde apareça um dígito 1 nessa coluna e seja x_0 o número de peças dessa pilha e mude-se esse dígito 1 para o dígito 0; mudemos também todos os dígitos de x_0 nas colunas onde o número de dígitos 1 é ímpar. É fácil observar que o número de peças dessa pilha ficou inferior a x_0, o que mostra que passámos de uma configuração de $\mathcal{D}$ para uma de $\mathcal{V}$.

Estas três condições mostram que uma configuração é V–posição se e só se a sua soma–Nim é nula. □

Exemplo 1.2.13. No filme "*O ano passado em Marienbad*", o jogo do Nim aparece várias vezes, com cartas de baralho em vez de fósforos, com a configuração inicial $(7, 5, 3, 1)$, que é uma V–posição. De facto, pelo Teorema de Bouton (Teorema 1.2.12), como

7	1	1	1
5	1	0	1
3	0	1	1
1	0	0	1
soma–Nim	0	0	0

a soma–Nim desta configuração é nula. Daí a frase "*É um jogo, mas eu ganho sempre*", desde que seja o segundo a jogar! ♢

1.2.4 Variantes do jogo do Nim

Misère **Nim**

Um jogo *misère* é um jogo em que o jogador a fazer a última jogada possível perde. O *misère Nim* é a variante do Nim em que o jogador que retira a última peça perde.

A matemática do jogo

Os conceitos matemáticos envolvidos neste jogo são os mesmos definidos para o jogo do Nim. Neste tipo de jogo, a única alteração à Proposição 1.2.1 é na alínea a): a posição terminal $(0, 0, \ldots, 0)$ é uma D–posição, mantendo-se válidas as restantes alíneas.

Vamos considerar, no jogo *misère* Nim, três casos.

- Todas as pilhas têm uma única peça: neste caso, o primeiro jogador só consegue vencer o jogo se deixar um número ímpar de pilhas com 1 peça; assim, uma V–posição é aquela que tem um número ímpar de pilhas com 1 peça.

- Existe mais do que uma pilha, mas apenas uma delas tem mais do que uma peça e, nesse caso, é o primeiro jogador que tem a estratégia vencedora:

  - se o número de pilhas é par, então o primeiro jogador deve remover todas as peças da pilha que tinha mais do que uma peça;
  - se o número de pilhas é ímpar, então o primeiro jogador deve deixar apenas uma peça na pilha que tinha mais do que uma peça.

  Em qualquer um dos casos, o segundo jogador ficará sempre com um número ímpar de pilhas com uma só peça. Portanto, uma V–posição é aquela que tem um número ímpar de pilhas com 1 peça.

- Existe mais do que uma pilha com mais do que uma peça e, nesse caso, o jogador que tiver a estratégia vencedora, caso fosse um jogo do Nim clássico, tem também a estratégia vencedora para o *misère* Nim, isto é:

- se a soma–Nim da configuração inicial é nula, então estamos perante uma V–posição: é o segundo jogador que tem a estratégia vencedora. Para tal basta jogar como no jogo do Nim clássico; em determinado momento, o primeiro jogador irá deixar uma única pilha com mais do que uma peça e, nesse caso, o segundo jogador deverá eliminar todas as peças ou deixar apenas uma dessa pilha, consoante o número de pilhas que resta com uma peça for ímpar ou par.

- se a soma–Nim da configuração inicial não é nula, então estamos perante uma D–posição e será o primeiro jogador o vencedor. Este deverá alterar a configuração inicial de forma a que a soma–Nim seja nula e jogar como no jogo do Nim clássico, até o segundo jogador deixar uma única pilha com mais do que uma peça. Depois é só seguir a estratégia descrita no ponto anterior.

Assim, segundo Ferguson [9], aplica-se igualmente o método do Teorema de Bouton (Teorema 1.2.12) para jogar o *misère* Nim. Joga-se com as regras normais do Nim clássico enquanto houver pelo menos duas pilhas com mais do que uma peça. Quando o adversário finalmente joga de modo a que fique exatamente uma pilha com mais do que uma peça, deve jogar-se de modo a reduzir essa pilha a 0 ou a 1 peça, de modo a que fique um número ímpar de pilhas com uma peça.

Exemplo 1.2.14. Consideremos um jogo *misère* Nim com a configuração inicial $(3, 5, 7)$. Então:

3	0	1	1
5	1	0	1
7	1	1	1
soma–Nim	0	0	1

e, portanto, o primeiro jogador tem a estratégia vencedora. Basta para isso retirar uma peça de uma das pilhas para ter a certeza que ganha. Vamos supor que retira uma peça da primeira pilha e obtemos a configuração $(2, 5, 7)$. Diz a estratégia que devemos jogar como o jogo do Nim clássico até apenas uma pilha ter mais do que uma peça e as restantes ou zero ou uma peça. Sabemos que a estratégia é independente da jogada do segundo jogador, por isso suponhamos que este jogador retira 3 peças da terceira pilha, por exemplo.

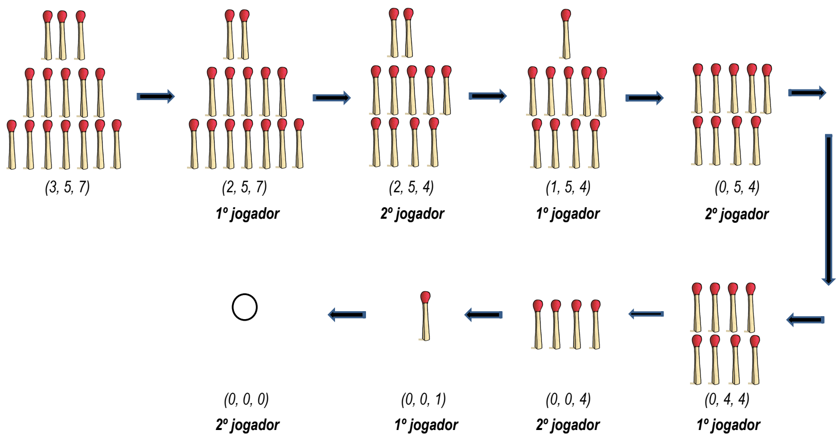
Então obtemos

2	0	1	0
5	1	0	1
4	1	0	0
soma–Nim	0	1	1

Assim, o primeiro jogador deverá retirar 1 peça da primeira pilha para repor a soma–Nim nula e obtemos a configuração $(1, 5, 4)$. Suponhamos que, por exemplo, o segundo jogador retira 1 peça também da primeira pilha, então obtemos

0	0	0	0
5	1	0	1
4	1	0	0
soma–Nim	0	0	1

E, neste caso, o primeiro jogador deverá retirar 1 peça da segunda pilha e obter a configuração $(0, 4, 4)$, que claramente é uma V–posição. E estamos no momento do jogo em que é de esperar que o segundo jogador deixe ficar apenas uma única pilha com mais do que uma peça. Note-se que, se o segundo jogador tirar as 4 peças de uma das pilhas, o primeiro retira 3 peças da outra pilha e ganha (pois o segundo jogador irá retirar a última peça e é o ultimo jogador a jogar, perdendo). Se o segundo retirar 3 ou menos peças de uma das pilhas, ao primeiro jogador basta igualar até obter a configuração $(0, 0, 1)$, como exemplifica a figura.



$\diamondsuit$

Note-se que, nesta variante do jogo do Nim, o jogador que retira a última peça perde e, portanto, as V–posições são exatamente as mesmas que no jogo do Nim clássico, exceto quando se deixa:

- um número ímpar de pilhas com uma peça, é uma V–posição
- um número par de pilhas com uma peça, é uma D–posição.

Assim, para ganhar o jogo *misère* Nim, joga-se exatamente como no jogo (normal) do Nim, exceto se a jogada leva a uma configuração em que todas as pilhas têm uma peça. Neste caso, deve deixar-se exatamente uma pilha com uma única peça, de forma a forçar o adversário a fazer a última jogada, perdendo desta forma o jogo.

Fibonacci Nim

O Fibonacci Nim [17] é uma variante do jogo do Nim jogado com uma única pilha de n peças, onde $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. O primeiro jogador pode remover qualquer número de peças q_1, com $q_1 \in \mathbb{N}$, tal que $1 \leq q_1 \leq n-1$. Se na k-ésima jogada forem retiradas q_k peças (e ainda houver peças na pilha), então na $k+1$-ésima jogada poderão ser tiradas q_{k+1} tal que $1 \leq q_{k+1} \leq 2q_k$. O jogador que remover a última peça ganha.

A matemática do jogo

É possível determinar uma estratégia vencedora para o jogo Fibonacci Nim. No entanto, neste trabalho iremos apenas apresentar essa estratégia, sem a demonstrar, podendo a sua demonstração ser encontrada em [27].

Para definir uma estratégia vencedora, é necessário introduzir o conceito de expansão de Fibonacci de um número inteiro não negativo.

A expansão de Fibonacci de um número inteiro não negativo n é a representação desse inteiro usando os dígitos 0 e 1 de modo a que multiplicando esses dígitos por certos números de Fibonacci[7] e adicionando-os obtemos n.

[7] Os números de Fibonacci são definidos pela seguinte sucessão:

$$f_n = \begin{cases} 0 & \text{se } n = 0 \\ 1 & \text{se } n = 1 \\ f_{n-1} + f_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}.$$

Recordemos que, pelo Teorema de Zeckendorf [28], todo o inteiro positivo pode ser representado (de forma única) como a soma de um ou mais números de Fibonacci distintos de tal modo a que essa soma não inclui dois números de Fibonacci consecutivos.

Para garantir que esta expansão é única basta impor uma condição: para escrever a expansão de Fibonacci de n, começamos por colocar o dígito 1 no lugar do maior número de Fibonacci f_k tal que $f_k \leq n$ e repetir este processo para a diferença $n - f_k$, e assim sucessivamente.

Exemplo 1.2.15. Consideremos o número 17. O maior número de Fibonacci que é menor ou igual a 17 é 13. Como $17 - 13 = 4$ e o maior número de Fibonacci que é menor ou igual a 4 é 3, temos que:
$$17 = 1 \times 13 + 0 \times 8 + 0 \times 5 + 1 \times 3 + 0 \times 2 + 1 \times 1 + 0 \times 1 = (1001010)_{Fib}$$
$\diamondsuit$

Exemplo 1.2.16. Note-se que (110100) não é uma expansão de Fibonacci válida para o número 15 uma vez que o maior número de Fibonacci que é menor que 15 é 13. Assim a expansão de Fibonacci correta para 15 é $(1000100)_{Fib}$. $\diamondsuit$

Uma propriedade importante da expansão de Fibonacci é que entre dois dígitos iguais a 1 existe, pelo menos, um dígito igual a 0. Este resultado é intuitivo, atendendo à definição da sucessão dos números de Fibonacci (onde um termo é a soma dos dois anteriores).

Consideremos um jogo de Fibonacci Nim com uma pilha com n peças. Seja f_n o número de Fibonacci associado ao dígito 1 mais à direita na expansão de Fibonacci do número n. Prova-se que, quando um jogador deixa uma configuração onde não é possível remover f_n peças, então essa configuração é uma V–posição. [27]

Note-se que, num jogo de Fibonacci Nim com uma pilha com n peças, podem surgir dois casos.

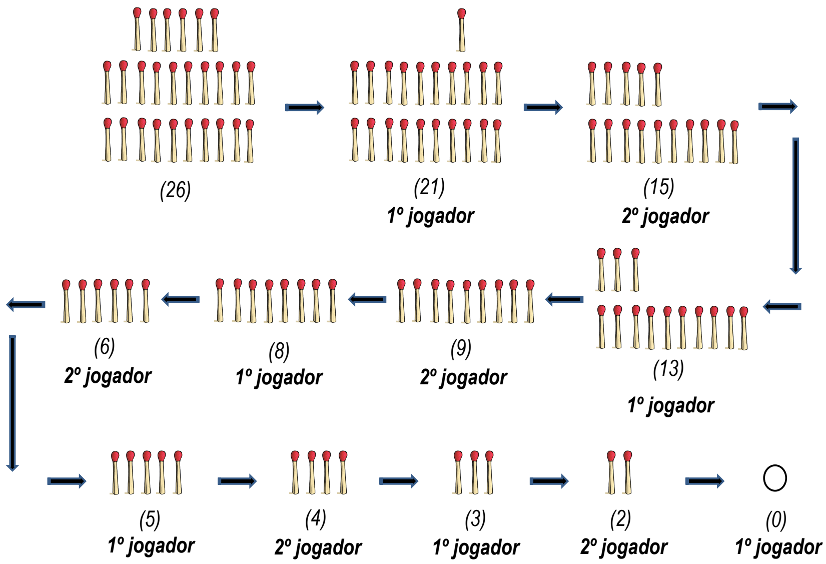
- Se n não é um número de Fibonacci então é sempre possível ao primeiro jogador remover f_n peças (note-se que $f_n < n$) e, portanto, de acordo com a estratégia vencedora, este jogador ganha.

Exemplo 1.2.17. Consideremos um jogo de Fibonacci Nim com uma pilha de 26 peças. Ora, 26 não é um número de Fibonacci e

$$26 = 1\times21+0\times13+0\times8+1\times5+0\times3+0\times2+0\times1+0\times1 = (10010000)_{Fib}$$

Logo, o primeiro jogador, que pode retirar até 25 peças, de acordo com a estratégia vencedora, irá retirar 5 peças, deixando 21 peças. Por outro lado, agora o segundo jogador, no máximo, só poderá tirar 10 peças. Como 21 é número de Fibonacci, não poderá aplicar a estratégia vencedora. Retira, por exemplo, 6 peças e deixa 15 peças. De acordo com as regras, o primeiro jogador, pode retirar até 12 peças. Como $15 = (1000100)_{Fib}$, este jogador deverá retirar 2 peças, deixando 13 peças. O segundo jogador, por exemplo, retira o máximo de peças permitido: 4 peças, deixando 9 peças. Agora, o primeiro jogador pode retirar até 8 peças. Mas, como $9 = (100010)_{Fib}$, apenas irá retirar 1 peça, deixando 8 peças. Assim, o segundo jogador, que pode retirar até 2 peças, retira, por exemplo, 2 peças, deixando 6 peças. O primeiro jogador pode retirar até 4 peças mas, como $6 = (10010)_{Fib}$, retira apenas 1 peça e deixa 5 peças. Assim, o segundo jogador retira, por exemplo, 1 peça, deixando 4 peças. Novamente, como $4 = (1010)_{Fib}$, o primeiro jogador retira 1 peça e deixa 3 peças.

Como ao segundo jogador só é permitido tirar, no máximo, 2 peças, o jogo está claramente ganho pelo primeiro jogador, independentemente do número de peças que o segundo jogador tire.



$\diamondsuit$

O próximo exemplo mostra que quando o número inicial de peças não é de Fibonacci e o primeiro jogador, no fim da primeira jogada, deixa um número de peças que também não é de Fibonacci, o segundo jogador não conseguirá aplicar a estratégia vencedora.

Exemplo 1.2.18. Consideremos agora um jogo de Fibonacci Nim com uma pilha inicial de 17 peças. Ora, 17 não é um número de Fibonacci e $17 = (1001010)_{Fib}$. Logo, o primeiro jogador, que pode retirar até 16 peças, apenas irá retirar 1 peça, de acordo com a estratégia vencedora, deixando 16 peças.

Agora, não sendo 16 um número de Fibonacci, o segundo jogador poderá tentar também aplicar a estratégia vencedora. No entanto, verificamos que não o consegue: como $16 = (1001000)_{Fib}$, para aplicar a estratégia vencedora teria de retirar 3 peças, mas as regras do jogo não permitem que retire mais do que 2 peças. Assim, ele irá retirar o menor número de peças possível, de forma a que o primeiro jogador, depois na sua vez, retire o menor número de peças da pilha. Suponhamos que o segundo jogador retira 1 peça da pilha, deixando 15 peças. Por sua vez, o primeiro jogador, verificando que 15 não é um número de Fibonacci, aplica a estratégia vencedora, $15 = (1000100)_{Fib}$, retira 2 peças e deixa 13 peças. O segundo jogador, que pode retirar até 4 peças, retira o menor número permitido, 1 peça e deixa 12 peças. Novamente, como $12 = (101010)_{Fib}$, o primeiro jogador retira 1 peça e deixa 11 peças. E, jogando sempre desta forma, claramente que o jogo é favorável ao primeiro jogador, sendo que, mesmo que o segundo jogador queira aplicar a estratégia vencedora, não o conseguirá fazer. $\diamondsuit$

- Se n é um número de Fibonacci então, neste caso, o primeiro jogador perde sempre; podemos ter duas situações logo após a primeira jogada:
  - o primeiro jogador não deixa um número de Fibonacci de peças e, nesse caso, o segundo jogador deve jogar usando a estratégia vencedora descrita anteriormente e ganha;
  - o primeiro jogador deixa um número de Fibonacci de peças e, nesse caso, o segundo jogador poderá eliminar todas as restantes peças e ganha; de facto, seja $n = f_k$ o número de peças inicial e m o número de peças retiradas pelo primeiro jogador; então $f_k - m = f_r$, para algum $r \leq k-1$. Queremos mostrar que $f_r \leq 2m$

(recorde-se que o segundo jogador pode retirar, no máximo, o dobro das peças que o primeiro jogador retirou). Como

$$m = f_k - f_r \geq f_k - f_{k-1} = f_{k-2},$$

vem que $2m \geq f_{k-2} + f_{k-2} \geq f_{k-1} \geq f_r$. E, portanto, o segundo jogador poderá eliminar todas as peças que ficam na pilha.

Exemplo 1.2.19. Consideremos um jogo de Fibonacci Nim com uma pilha inicial de 144 peças. Ora, 144 é o décimo segundo número de Fibonacci. Se o primeiro jogador deixar 89 peças, isto é, se retirar 55 então o segundo jogador ganha imediatamente, retirando as 89 peças restantes (pois 89 é menor que o dobro de 55). Assim, o primeiro jogador vê-se obrigado a deixar um número de peças que não pertença à sequência de Fibonacci, e o segundo jogador consegue ganhar aplicando a estratégia vencedora anteriormente descrita. $\diamondsuit$

No Apêndice B poderão ser encontradas, a título de curiosidade, outras variantes do jogo do Nim.

1.3 Jogo de Ramsey

O jogo de Ramsey é um jogo estratégico para dois jogadores num tabuleiro composto por seis pontos não colineares três a três.

1.3.1 História do jogo

Para Slany [24], o jogo de Ramsey é baseado num exemplo simples (mas não trivial) da Teoria de Ramsey, que ficou conhecido por "Problema de Ramsey":[8]

[8] Este problema também ficou conhecido como "*Party–puzzle*".

Problema de Ramsey [24]

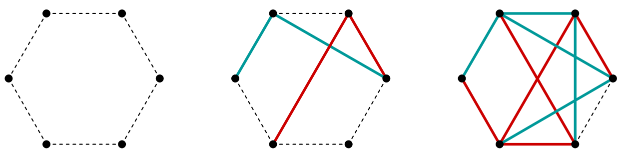
Se há seis pessoas numa reunião, então há necessariamente três pessoas que se conhecem mutuamente ou três pessoas que não se conhecem mutuamente nessa reunião (admitindo que, se a conhece b, então b conhece a).

Slany refere ainda que o jogo de Ramsey é um jogo de lógica que foi inicialmente descrito com o nome de "jogo do Sim" por Gustavus Simmons em 1969. Desde então tem despertado muito interesse: "jogos como este são de interesse prático pois podem servir como modelos que simplificam a análise de situações competitivas que buscam ganhos diferentes, ou para situações onde se é confrontado com um ambiente imprevisível, como a Natureza".

A teoria de Ramsey mostrou que nenhum jogo pode terminar em empate e, de acordo com [16], existem várias estratégias vencedoras para o segundo jogador, se este jogar sempre de forma racional. No entanto, ainda não existe uma estratégia vencedora que se possa facilmente memorizar [24].

1.3.2 Regras do jogo

O jogo de Ramsey é um jogo com dois jogadores num tabuleiro composto por seis pontos dos quais, quaisquer três, não estão na mesma reta. Cada jogador tem um lápis de cor diferente e, alternadamente, traça um segmento de reta unindo dois pontos, como exemplifica a figura seguinte.



Note-se que cada par de pontos só pode ser unido uma única vez.

O objetivo é tentar evitar formar um triângulo da mesma cor, em que os vértices são três dos seis pontos dados, ou seja, o jogador que unir três pontos com três arestas da mesma cor, perde o jogo.

1.3.3 A matemática do jogo

É possível provar que não existe empate num jogo de Ramsey.

O Princípio da Gaiola de Pombos[9] (PGP) é um princípio de contagem que permite mostrar que o jogo de Ramsey admite sempre um vencedor.

Teorema 1.3.1 (Princípio da gaiola dos pombos). *[5] Se $m+1$ objetos forem introduzidos em m caixas então pelo menos uma das caixas tem dois ou mais objetos.*

Matematicamente, podemos reescrever o enunciado do PGP da seguinte forma: sejam A e B dois conjuntos arbitrários finitos tais que $|A| > |B|$, então não existe uma função injectiva $f : A \to B$. Recorde-se que $|A|$ e $|B|$ representam, respetivamente, as cardinalidades dos conjuntos A e B.

Embora se trate de um resultado elementar, o PGP é útil para resolver problemas que, pelo menos à primeira vista, não são imediatos. Para aplicá-lo, apenas temos que identificar corretamente, na situação dada, quem faz os "papéis" dos objetos e das caixas. No nosso caso, o jogo de Ramsey, os segmentos de reta (em que um dos extremos é um ponto fixado) que vão sendo desenhados pelos dois jogadores são os objetos e as cores são as caixas.

[9] Também conhecido como Princípio de Dirichlet.

Uma vez que queremos mostrar que existe sempre um "triângulo da mesma cor", então no final queremos mostrar que obtemos pelo menos três arestas da mesma cor (que formam um triângulo). No entanto, o PGP acima enunciado na sua forma mais simples, não é suficiente, uma vez que apenas garante a existência de, pelo menos, dois segmentos da mesma cor.

A demonstração da generalização do PGP pode ser encontrada em [7].

Teorema 1.3.2 (Generalização do PGP)**.** *Se* $(k-1)m+1$ *objetos forem introduzidos em* m *caixas, então pelo menos uma das caixas terá de conter* k *(ou mais) objetos.*

Para o nosso problema podemos mesmo reescrever o teorema anterior em termos de coloração de objetos:

Teorema 1.3.3. *[5] Sejam* $m, n, k \in \mathbb{N}$ *tais que* $n \geq (k-1)m+1$*. Se existem* n *objetos coloridos com* m *cores diferentes, então existem* k *objetos com a mesma cor.*

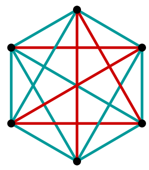
Demonstração. Suponhamos, por redução ao absurdo, que, por cada cor, no máximo, existem $k-1$ objetos. Então, no máximo, existem $(k-1)m$ objetos, ou seja, $n \leq (k-1)m$, o que é absurdo! Logo existem k objetos com a mesma cor. □

Além disso, prova-se que a desigualdade $n \geq (k-1)m+1$ é a melhor possível. Ou seja, se tivermos menos do que $(k-1)m+1$ objetos, existe uma forma de colori-los tal que, no máximo, $k-1$ têm a mesma cor. De facto, menos do que $(k-1)m+1$ objetos significa que, no máximo, temos $(k-1)m$ objetos e portanto, podemos "dividi-los" por m cores e ter, no máximo, $k-1$ de cada cor.

Mas como aplicar esta generalização do PGP à prova de que no jogo de Ramsey não há empate?

Se considerarmos que o jogo de Ramsey se baseia num grafo com seis vértices, a ideia é mostrar que não é possível colorir as arestas de um grafo completo[10] com seis vértices de tal modo que não haja nenhum triângulo com as arestas todas da mesma cor.

Note-se que se o jogo acabasse empatado significaria que existiria uma coloração do grafo completo que não admitiria nenhum triângulo com as arestas da mesma cor. Na figura seguinte está um exemplo de uma coloração possível de um grafo completo com seis vértices. Note-se que existe um triângulo cujas arestas são todas azuis.



O próximo resultado prova que num jogo de Ramsey nunca existe empate, ou seja, existe sempre um vencedor.

Proposição 1.3.4. *Para qualquer coloração com duas cores das arestas de um grafo completo com seis vértices, este contém um triângulo com as três arestas da mesma cor.*

Demonstração. Consideremos um grafo completo com seis vértices e com as arestas coloridas a azul e a vermelho.

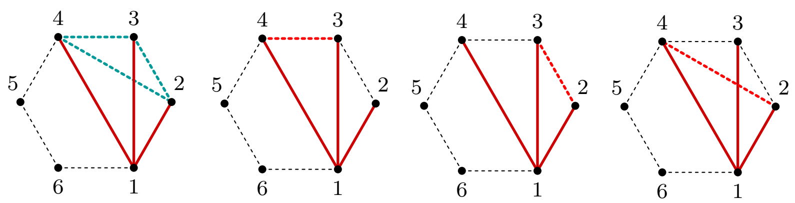
Seja $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o conjunto dos vértices desse grafo. Denotamos por $\{i, j\}$ a aresta que une o vértice i ao vértice j. Se i, j e l são vértices, denotamos por $\{i, j, l\}$ o conjunto das arestas $\{i, j\}$, $\{j, l\}$ e $\{l, i\}$.

[10]Um grafo completo é um grafo (simples) em que todo o vértice é adjacente a todos os outros vértices.

Se escolhermos, ao acaso, um vértice, este está unido aos outros cinco vértices, logo têm-se cinco arestas para colorir ($n = 5$). Pelo Teorema 1.3.3, como $5 \geq 1 + 2(k-1)$ é equivalente a $k \leq 3$, garantimos que cada vértice é incidente a três arestas com a mesma cor.

Assim, das cinco arestas incidentes num vértice, há pelo menos três que são da mesma cor. Suponhamos, sem perda de generalidade, que o vértice escolhido foi o vértice 1 e que as arestas $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$ são de cor vermelha.

Então, ou o triângulo $\{2,3,4\}$ é composto por arestas azuis, ou uma das arestas desse triângulo é vermelha e os vértices incidentes a essa aresta juntamente com o vértice 1 formam um triângulo com todas as arestas de cor vermelha. Veja-se a figura seguinte a título de exemplo.



Logo existe sempre um triângulo com as arestas todas da mesma cor. $\square$

E, se no jogo de Ramsey para além de aumentarmos o número de vértices, aumentarmos também o número de jogadores, ou seja, se aumentarmos o número de cores? Será que garantimos que não há empate?

Exemplo 1.3.5. Consideremos um grafo completo com 17 vértices em que todas as arestas são coloridas com três cores. É possível mostrar que existe um triângulo com as três arestas da mesma cor. De facto, e de acordo com a demonstração anterior, fixando um vértice, das 16 arestas nas quais esse vértice é incidente, há pelo menos seis da mesma cor (note-se que $16 \geq 3(k-1)+1$ é equivalente a $k \leq 6$).

Considerando os 6 vértices nos quais são incidentes as arestas da mesma cor, temos dois casos:

- entre esses vértices há também uma aresta com essa cor e, portanto, temos um triângulo formado por essa aresta e outras duas (das incidentes no vértice fixado);
- entre esses vértices não há nenhuma aresta com essa cor e, nesse caso, esses 6 vértices formam um grafo cujas arestas estão coloridas com duas cores e estamos no caso do jogo de Ramsey original.

$\diamondsuit$

De facto, é possível construir uma sucessão numérica que fornece o número mínimo de vértices de um grafo, quando aumentam o número de cores, de forma a garantir a existência de um triângulo com as arestas todas das mesma cor, ou seja, a garantir um vencedor no jogo. Assim, verifica-se que:

$$\begin{array}{ll}
m = 1 & n_1 = 3 \\
m = 2 & n_2 = (3-1)2 + 2 = 6 \\
m = 3 & n_3 = (6-1)3 + 2 = 17 \\
& \vdots \\
m & n_m = (n_{m-1} - 1)m + 2 \\
m + 1 & n_{m+1} = (n_m - 1)(m+1) + 2
\end{array}$$

Se tivermos um grafo completo com n_{m+1} vértices e se fixarmos um vértice v_1 desse grafo, existem $n_{m+1} - 1 = (n_m - 1)(m+1) + 1$ arestas nos quais ele é incidente. Pelo PGP, considerando uma coloração com $m + 1$ cores, é garantido que existem, pelo menos, n_m arestas com a mesma cor. Assim, se não existir um triângulo em que um dos vértices é v_1 e as arestas têm todas outra cor, obtém-se um subgrafo completo com n_m vértices e cujas arestas são todas coloridas com m cores, por indução.

No entanto, para generalizações do jogo de Ramsey com menos de seis vértices, podemos afirmar que pode acontecer o empate, ou seja, não existe um vencedor garantidamente. A próxima figura exemplifica colorações em que não existe nenhum triângulo cujas arestas tenham uma única cor para casos em que temos cinco ou quatro vértices.

Note-se que o caso do grafo com três vértices não faz sentido enquanto jogo, uma vez que só é possível fazer um triângulo e esse nunca vai ser de uma só cor, dada a alternância das jogadas.

Assim, cinco vértices são insuficientes para garantir a existência de um triângulo cujas arestas são todas da mesma cor, pelo que seis é o menor número de vértices que verifica esta propriedade.

O problema de Ramsey, referido anteriormente, resolve-se de forma idêntica à situação explorada no jogo de Ramsey, considerando para seis vértices as seis pessoas, considerando que "pintar uma aresta de azul" representa, por exemplo, que essas duas pessoas não se conhecem e que "pintar de vermelho" representa que as pessoas se conhecem. Observe-se que neste problema as arestas podem ser todas azuis ou todas vermelhas, o que não acontece no jogo de Ramsey.

O Teorema de Ramsey é uma generalização desta situação.

Teorema 1.3.6 (Teorema de Ramsey). *[5] Dados os inteiros $n, m \geq 2$, existe um inteiro $N > 0$ tal que, qualquer que seja a coloração com 2 cores das arestas de um grafo completo com N vértices, existe sempre um subgrafo completo com n vértices cujas arestas têm todas a primeira cor ou um subgrafo completo com m vértices cujas arestas têm todas a segunda cor.*

Em homenagem a Ramsey, que provou este e outros resultados, o menor número N que satisfaz esta propriedade é chamado *número de Ramsey* que denotamos por $R(n,m)$. Por exemplo, com a análise do jogo de Ramsey e das suas possíveis generalizações, vimos que $R(3,3) = 6$.

Assim é fácil observar que, uma vez que qualquer grafo completo com mais de seis vértices contém um subgrafo completo com seis vértices, qualquer generalização do jogo de Ramsey com mais de seis vértices (e dois jogadores) terá sempre um vencedor.

Podemos generalizar e reformular o Teorema de Ramsey (Teorema 1.3.6) em termos de colorações de segmentos usando diversas cores:

Teorema 1.3.7. *[5] Sejam $k \geq 1$ e $n_1, n_2, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$. Existe um inteiro $N > 0$ tal que, para qualquer coloração com k cores de um grafo completo com N vértices, existe um subgrafo com n_1 vértices cujas arestas são todas da primeira cor ou um subgrafo com n_2 vértices cujas arestas são todas da segunda cor ou $\ldots$ ou um subgrafo com n_k vértices cujas arestas são todas da k-ésima cor.*

1.4 Jogo de Sperner

O jogo de Sperner é um jogo estratégico para dois jogadores num tabuleiro triangular subdividido em triângulos, de modo a que cada par de triângulos ou não tem pontos em comum ou partilha um vértice ou um lado.

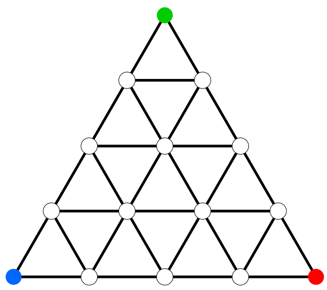
1.4.1 História do jogo

Em 1928, Emanuel Sperner, matemático alemão, publicou um trabalho onde apresentava uma demonstração alternativa de um Teorema de Lebesgue, que caracteriza o conceito de dimensão em espaços euclidianos.

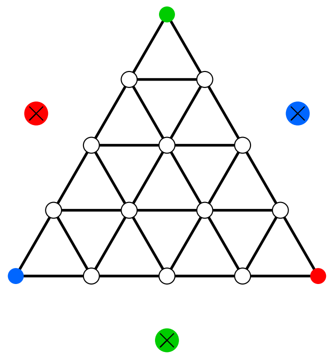
No entanto, foi um resultado auxiliar, hoje conhecido como Lema de Sperner, que ganhou notoriedade. Esse resultado estuda a coloração dos vértices da triangulação de uma região poligonal com três cores, de acordo com uma certa regra, e deduz que, desse modo, há sempre um triângulo tricolor. Uma das muitas qualidades do Lema de Sperner é a de permitir formulações equivalentes, quase todas elementares, que elucidam sobre a natureza da propriedade que descreve. Uma delas transpõe as hipóteses do lema para as regras do jogo de Sperner, e a conclusão traduz-se no facto de, neste jogo, nunca ocorrerem empates. [29]

1.4.2 Regras do jogo

O jogo de Sperner é um jogo para dois jogadores num tabuleiro triangular subdividido em triângulos, de modo a que cada par de triângulos ou não tem pontos em comum ou partilha um vértice ou um lado. O tabuleiro triangular é um triângulo grande, de tamanho arbitrário, com os vértices coloridos com três cores (por exemplo, vermelho, verde e azul), como mostra a figura seguinte.

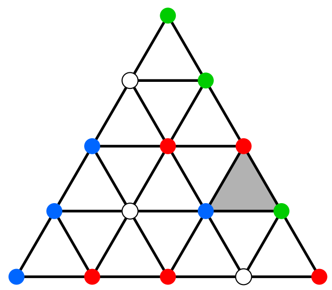


Cada jogador coloca, alternadamente, um disco colorido num dos vértices por colorir, de modo a que, em cada lado do bordo, o jogador só pode usar uma das duas cores dos extremos desse lado e, no interior do tabuleiro, pode utilizar qualquer cor, como mostra a figura seguinte.



O objetivo do jogo é nunca obter um triângulo pequeno com discos de cores distintas nos seus vértices, perdendo o jogador que o faça.

Assim, o primeiro jogador que completar um triângulo pequeno com um vértice de cada cor perde o jogo, como mostra a figura com um exemplo de um final do jogo de Sperner.



1.4.3 A matemática do jogo

Será ou não possível colorir os vértices, respeitando as regras nos lados do triângulo grande, sem fazer aparecer um triângulo pequeno com três cores diferentes nos vértices?

A resposta a esta pergunta está num resultado matemático de alguma profundidade e com suficiente poder para permitir a demonstração do Teorema do ponto fixo de Brower[11] para funções contínuas numa bola fechada: o Lema de Sperner.

Assim, é possível provar que não existe um jogo de Sperner que termine em empate, ou seja, é possível provar que um dos jogadores tem que fazer uma jogada em que, pelo menos, um triângulo fica com discos de cores diferentes nos vértices. No entanto, tal como o jogo de Ramsey, encontrar a estratégia vencedora que se possa facilmente memorizar é um problema ainda em aberto. [4]

Comecemos por definir alguns conceitos necessários.

Seja T um triângulo qualquer subdividido em triângulos menores denotados por Δ_i, chamados subtriângulos, de tal forma que para quaisquer dois subtriângulos Δ_i e Δ_j seja satisfeita uma, e apenas uma, das situações:

a) Δ_i e Δ_j não têm nenhum ponto em comum;

b) Δ_i e Δ_j têm exatamente um vértice em comum;

c) Δ_i e Δ_j têm exatamente uma aresta em comum.

A uma subdivisão com estas características chamamos **triangulação de um triângulo**.[12] Dizemos ainda que os vértices e as arestas dos subtriângulos são, respetivamente, os vértices e as arestas da triangulação.

Para confirmar a existência de um vencedor no jogo de Sperner, é necessário estudar duas "dimensões" do Lema de Sperner.

Comecemos por mostrar o Lema de Sperner para um intervalo fechado.

[11] O Teorema do ponto fixo de Brower garante que, dada uma bola D unitária fechada em $\mathbb{R}^n$ e dada $f : D \to D$ uma função contínua, existe $x \in D$ tal que $f(x) = x$.

[12] O conceito de triangulação pode ser generalizado a qualquer polígono.

Lema 1.4.1. *[6] Seja I um intervalo fechado cujos extremos têm rótulos distintos 0 e 1. Consideremos ainda uma partição (finita) de I onde é feita uma rotulação aleatória nos extremos de cada subintervalo (dessa partição) com os rótulos 0 e 1. Então existe um número ímpar de subintervalos cujos extremos têm rótulos distintos.*

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos que o extremo esquerdo do intervalo I tem rótulo 0 e o extremo direito tem rótulo 1.

Primeiro observemos que existem duas possibilidades na rotulação da partição em I:

- todos os pontos da partição têm rótulo igual a 0: nesse caso, o único subintervalo cujos extremos têm rótulos distintos é o último, cujo extremo direito é também extremo direito de I. Então existe somente um intervalo com rótulos distintos nos seus extremos;

- pelo menos um dos pontos da partição tem rótulo igual a 0: observemos que, sendo o extremo esquerdo de I rotulado com 0, o primeiro subintervalo com rótulos distintos nos seus extremos é do tipo (01).[13] Da mesma forma, como o extremo direito de I tem rótulo 1, temos que o último subintervalo da partição cujos extremos têm rótulos distintos também é do tipo (01). Assim, os subintervalos cujos extremos têm rótulos distintos do tipo (01) e (10) intercalam-se, isto é, se o k-ésimo subintervalo é do tipo (01), então o $(k+1)$-ésimo subintervalo é do tipo (10), o $(k+2)$-ésimo é do tipo (01) e assim sucessivamente.

[13]Dizemos que um intervalo I é do tipo (nm) se o rótulo do extremo esquerdo é n e o rótulo do extremo direito é m.

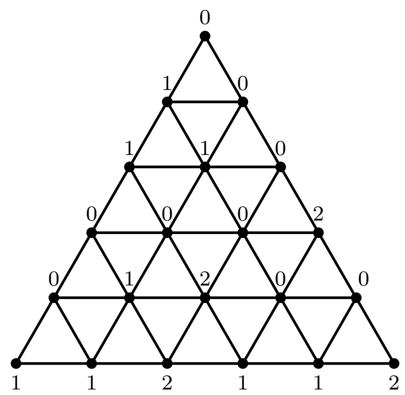
Desta forma, o número de intervalos do tipo (01) supera numa unidade o número de intervalos do tipo (10). Se denotarmos por p o número de subintervalos do tipo (01) no intervalo I, então o número de subintervalos do tipo (10) é $p - 1$. Logo o número total de subintervalos cujos extremos têm rótulos distintos em I é dado por $p + (p - 1) = 2p - 1$, que representa um número ímpar.

□

Podemos expandir o Lema 1.4.1 para duas dimensões.

Seja T um triângulo no qual é feita uma triangulação com uma rotulação aleatória nos vértices dessa triangulação seguindo apenas a seguinte regra: todo o vértice de qualquer subtriângulo que pertença a uma aresta de T recebe um rótulo igual a um dos rótulos das extremidades dessa aresta. A uma rotulação satisfazendo esta condição chamaremos **rotulação de Sperner**. Note-se que não é feita nenhuma imposição aos rótulos dos vértices situados no interior do triângulo T.

Exemplo 1.4.2. O triângulo seguinte tem uma rotulação de Sperner.



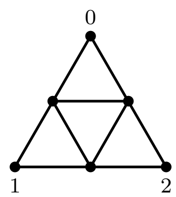
◇

Vejamos então o Lema de Sperner para um triângulo.

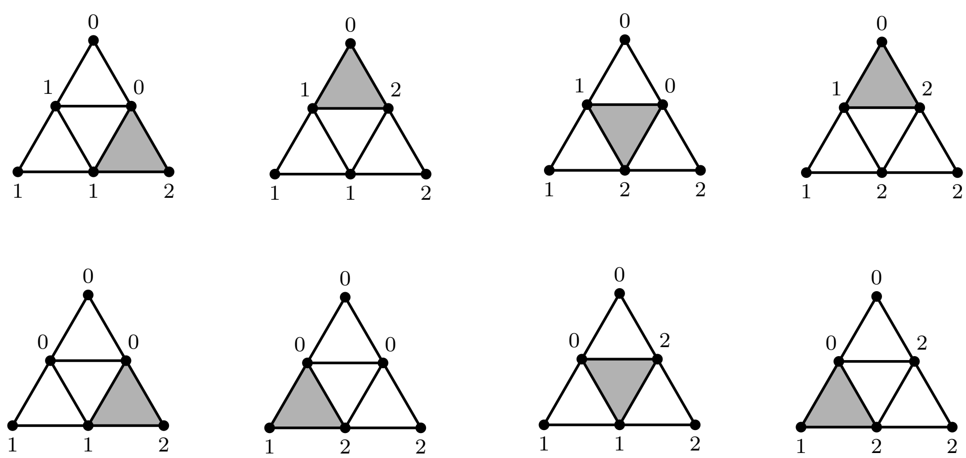
Lema 1.4.3. *[6] Seja T um triângulo com uma triangulação de T cuja rotulação é de Sperner. Então existe, pelo menos, um subtriângulo cujos vértices têm três rótulos distintos e, além disso, o número de subtriângulos nessas condições é ímpar.*

Antes da demonstração deste resultado, vejamos o caso da triangulação mais simples de um triângulo com oito rotulações possíveis, confirmando-se a existência de um triângulo com três rótulos distintos.

Exemplo 1.4.4. Consideremos o caso mais simples da triangulação de um triângulo, só com um vértice nas arestas do triângulo, conforme a figura.



Qualquer que seja a rotulação que se considere, esta origina sempre um triângulo com rótulos distintos



♢

Provemos agora o Lema 1.4.3.

Demonstração. Consideremos uma triangulação num triângulo T cujos vértices estão rotulados com 0, 1 e 2 e suponhamos que é feita uma rotulação de Sperner. Então:

– um vértice na aresta de T do tipo (01) pode ser rotulado com 0 ou com 1, mas não com 2;

– um vértice na aresta de T do tipo (12) pode ser rotulado com 1 ou com 2, mas não com 0;

– um vértice na aresta de T do tipo (20) pode ser rotulado com 2 ou com 0, mas não com 1;

– um vértice dentro do triângulo T pode ser rotulado com 0, 1 ou 2.

Pretende mostrar-se que para qualquer triangulação e qualquer rotulação de Sperner que se considere, existe sempre, pelo menos, um triângulo do tipo (012).[14] Mais ainda, queremos mostrar que o número de triângulos deste tipo é ímpar.

Seja b o número de triângulos do tipo (012) numa rotulação de Sperner. Comecemos por contar o número de arestas do tipo (01) dentro e sobre o triângulo T.

Seja a o número de triângulos do tipo (010) ou (101). Os triângulos destes dois tipos têm duas arestas do tipo (01), enquanto um triângulo do tipo (012) tem apenas uma aresta do tipo (01). Note-se que para outros tipos de triângulos não existem arestas do tipo (01). Assim, o número total de arestas do tipo (01) (contanto triângulo a triângulo) é $2a + b$.

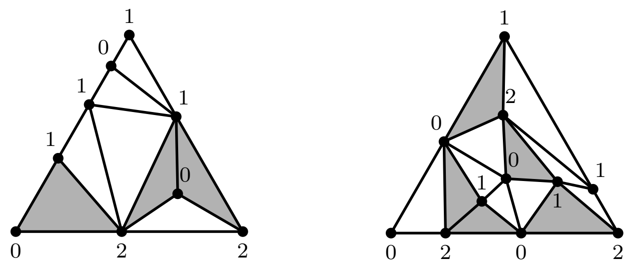
[14] Dizemos que um triângulo é do tipo (abc) se os rótulos dos seus vértices são a, b e c.

No entanto, neste total, as arestas dentro do triângulo T são contadas duas vezes, pois estas arestas pertencem sempre a dois triângulos.

Seja c o número de arestas do tipo (01) dentro do triângulo T. Deste modo teremos realmente contado $2c + d$, onde d é o número de arestas do tipo (01) sobre os lados do triângulo T.

Portanto, $2a+b = 2c+d$ e como, pelo Lema de Sperner para um intervalo fechado (Lema 1.4.1), d é ímpar, então b também será. □

Exemplo 1.4.5. Consideremos dois exemplos de triangulações com rotulações de Sperner e com um número ímpar de triângulos com rótulos distintos.



♢

O Lema 1.4.3 garante que um jogo de Sperner nunca pode acabar em empate.

1.4.4 *Casa*, *portas* e o Lema de Sperner

Seja T um triângulo com uma triangulação cuja rotulação é de Sperner.

Podemos pensar no triângulo T como uma *casa* e nos triângulos pequenos obtidos na triangulação como *quartos*. Designaremos as arestas dos triângulos obtidos do tipo (01) como *portas*. Observe-se que as *portas* podem encontrar-se no interior ou nos bordos da *casa*.

Desta forma, dizemos que uma *porta* é exterior se nos conduzir ao exterior da *casa*. Neste sentido, cada *quarto* pode:

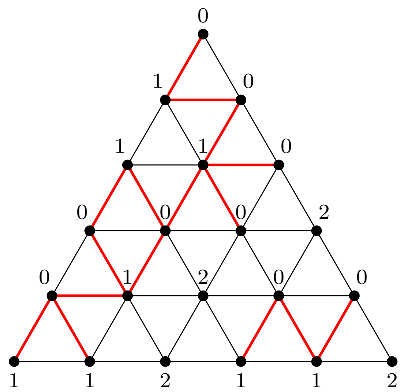
- não ter *portas* – são triângulos do tipo (000), (002), (022), (111), (112), (122) e (222);

- ter uma única *porta* e dizemos que é um *quarto sem saída* – são triângulos do tipo (012);

- ter duas *portas* e dizemos que é um *quarto comunicante* – são triângulos do tipo (001) ou (011).

Das regras da triangulação, sabemos que nenhum *quarto* tem mais do que uma *porta* exterior.

Exemplo 1.4.6. A figura seguinte exemplifica uma *casa* com *quartos* e *portas*, estas últimas assinaladas a vermelho.



◇

É válido o seguinte resultado:

Lema 1.4.7. *Dada uma casa com pelo menos um quarto e tal que cada quarto tem* 0, 1 *ou* 2 *portas, suponhamos que um quarto não pode ter mais do que uma porta exterior e que dois quartos não podem ter mais que uma porta em comum. Então o número de quartos sem saída e o número de portas exteriores têm a mesma paridade.*

É fácil verificar que todas as *portas* exteriores incidem na aresta do tipo (01) do triângulo T. Logo, pelo Lema 1.4.1, o número de portas exteriores é ímpar.

Nesta secção iremos mostrar o Lema 1.4.3 aplicando estas novas definições.

Definimos **percurso** pelos *quartos* da *casa* como sendo um percurso que obedece aos dois princípios seguintes:

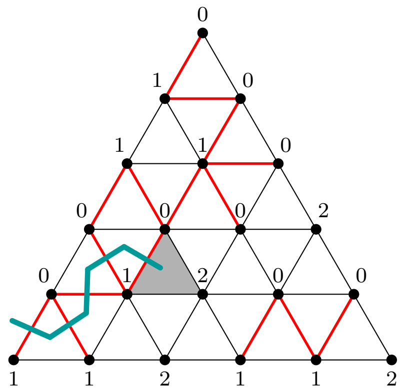
- cada percurso inicia-se numa *porta* exterior ou num *quarto* sem saída e continua através de *portas*, podendo terminar numa *porta* exterior ou num *quarto* sem saída;

- cada *porta* só pode ser atravessada uma única vez.

Note-se que um percurso está univocamente determinado pelo seu "ponto inicial" e também é univocamente determinado pelo seu "ponto final".

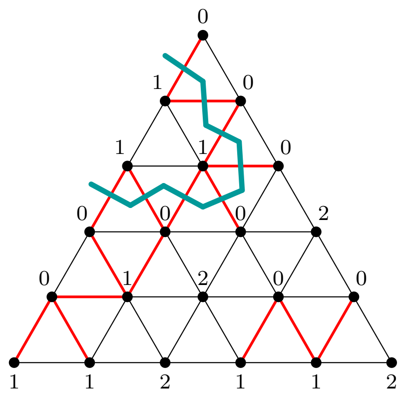
Nos próximos exemplos temos os três percursos distintos numa triangulação com uma rotulação de Sperner.

Exemplo 1.4.8. Esta figura mostra um percurso que termina num *quarto* sem saída.



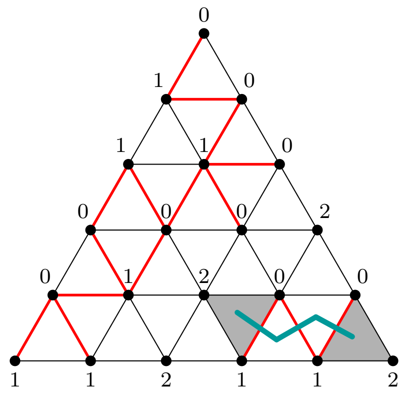
Note-se que este percurso localiza um triângulo do tipo (012). ♢

Exemplo 1.4.9. Esta segunda figura exemplifica o caso de um percurso que partindo de uma *porta* exterior sai da *casa*.



Note-se que este percurso não localiza nenhum triângulo do tipo (012). ♢

Exemplo 1.4.10. Por fim, esta figura exemplifica o caso de um percurso que, iniciando num *quarto* sem saída, vai ter a outro *quarto* sem saída.



Note-se que este percurso também localiza dois triângulos do tipo (012). ◇

Como o número total de *portas* exteriores é ímpar, e atendendo à definição de percurso, pelo menos um dos percursos tem de terminar num *quarto* sem saída. O que significa que existe, pelo menos, um triângulo do tipo (012). Note-se que os percursos que começam e terminam numa *porta* exterior, contemplam sempre um número par de *portas* exteriores, pelo que sobra sempre, pelo menos uma porta, da qual se inicia um percurso que tem de terminar num *quarto* sem saída.

Provámos assim que existe, pelo menos, um triângulo do tipo (012). Falta só verificar que o número de triângulos deste tipo é ímpar.

Recordemos que existem ainda triângulos do tipo (012) que não são possíveis de localizar através de um percurso que inicie numa *porta* exterior, mas sim através de um percurso que inicia e termina num *quarto*. Deste tipo de percurso resulta sempre um número par de triângulos do tipo (012). Fica assim provado que o número de triângulos do tipo (012) é sempre ímpar. Note-se que, atendendo à definição de percurso, nunca pode acontecer que dois percursos distintos terminem e/ou iniciem na mesma porta de saída.

Podemos ainda analisar e mostrar o Lema 1.4.3 com a paridade do grau de um vértice de um grafo.

Seja T um triângulo com uma triangulação cuja rotulação é de Sperner e sejam ainda $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ os triângulos obtidos na triangulação.

Seja v_i um ponto no interior do triângulo Δ_i, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$. Seja ainda v_0 um ponto exterior a T.

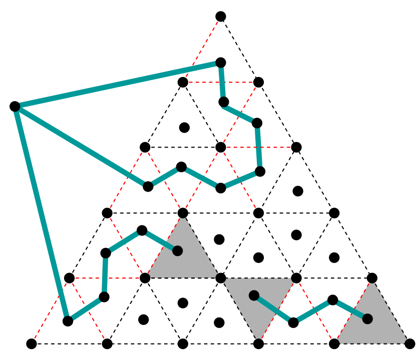
Consideremos um grafo sem orientação cujo conjunto dos vértices é dado por $V = \{v_0, v_1, \ldots, v_n\}$ e o conjunto das arestas é definido da seguinte forma:

- (v_0, v_i) é uma aresta do grafo se e só se Δ_i tem uma aresta do tipo (01) na aresta do tipo (01) de T, para $i > 0$;

- (v_i, v_j) é uma aresta do grafo se e só se Δ_i e Δ_j têm uma aresta do tipo (01) em comum, para $i, j > 0$.

Por outras palavras, um grafo assim definido não é mais do que a união de todos os "percursos pelos *quartos* da *casa*" possíveis.

Exemplo 1.4.11. Atendendo aos exemplos anteriores, obtemos o seguinte grafo:



$\diamondsuit$

Sendo o grau de um vértice igual ao número de arestas do grafo incidentes nesse vértice, facilmente se verifica que os vértices do grafo que pertencem a um triângulo do tipo (012) são de grau 1, enquanto que os restantes vértices do grafo são de grau 2, exceto o vértice v_0.

Recorde-se que:

Teorema 1.4.12. *[2] A soma dos graus dos vértices de um grafo é par. Mais ainda, o número de vértices com grau ímpar é sempre par.*

E, portanto, o número de triângulos do tipo (012) é ímpar, mas o número de vértices do grafo de grau ímpar é par, uma vez que v_0 não corresponde a nenhum triângulo do tipo (012), mas é um vértice de grau ímpar.

Capítulo 2

Jogos de soma nula

2.1 Introdução

Os conflitos de interesse estão sempre a acontecer, tanto na sociedade como no mundo empresarial, pelo que o ponto de partida da teoria dos jogos é maximizar os ganhos e minimizar as perdas, analisando e compreendendo cada tomada de decisão.

Os jogos de soma nula são exemplos de situações em que os jogadores têm interesses totalmente opostos. De acordo com John von Neumann, os jogos de soma nula são jogos em que a vitória (ou sucesso) de um participante implica, necessariamente, a derrota (ou insucesso) dos restantes participantes, independentemente da estratégia adotada por cada um deles.

Neste tipo de jogos não existe a possibilidade de cooperação entre os participantes. Na realidade, em situações de conflito puro, os acordos de cooperação dificilmente acontecem. A ação conjunta torna-se impraticável quando os participantes agem de acordo com os seus próprios interesses.

Podemos mesmo aplicar a teoria dos jogos ao meio empresarial. Dadas duas empresas concorrentes, cada uma delas tem estratégias pré-estabelecidas de conduta e ambas utilizam as mais diversas “artimanhas” na tentativa de descobrir a estratégia adversária e, ao mesmo tempo, resguardar a sua própria. Com o conhecimento da teoria dos jogos podemos mesmo determinar qual a melhor estratégia para cada empresa. Naturalmente, a teoria dos jogos não permite prever qual será o comportamento da empresa concorrente, mas sim estudar as diversas maneiras de se atuar racionalmente em situações de conflito.

Vejamos, por exemplo, uma situação empresarial que pode ser analisada como um jogo.

Exemplo 2.1.1 (“Empresas concorrentes”)**.** Duas empresas concorrentes produzem um mesmo produto e têm custos fixos de 5000€ por ano, independentemente de quanto conseguem vender. Ambas competem pelo mesmo mercado e devem escolher entre um preço alto (2€) e um preço baixo (1€), por unidade. As regras do mercado são as seguintes:

- a 2€, o mercado consome 5000 unidades;
- a 1€, o mercado consome 10000 unidades;
- se ambas as empresas aplicarem o mesmo preço, as vendas serão divididas de forma idêntica entre elas;
- se aplicarem preços diferentes, aquela com menor preço vende toda a quantidade e a outra nada vende.

Sendo os lucros a diferença entre os ganhos da venda e os custos fixos, podemos construir a seguinte tabela dos lucros:

	Empresa 2	
Empresa 1	**Preço baixo** (1€)	**Preço alto** (2€)
Preço baixo (1€)	(0,0)	(5000,-5000)
Preço alto (2€)	(-5000,5000)	(0,0)

Note-se que, numa entrada da forma (a, b), a representa os lucros (em euros) da Empresa 1 e b representa os lucros (em euros) da Empresa 2. Observe-se que, para todas as estratégias possíveis, a soma dos lucros é nula. E, portanto, é uma situação empresarial que pode ser vista como um jogo de soma nula. $\diamondsuit$

Assim, um tipo de estratégia de competição que pode ser utilizada nas organizações em situações de conflito desta natureza é a aplicação das estratégias dos jogos de soma nula.

É de notar que a maioria dos jogos económicos e sociais não são jogos de soma nula, pois, por exemplo, no comércio ou na atividade económica em geral, os acordos são frequentes e mostram-se, na maior parte das vezes, benéficos para todos.

Nas próximas secções iremos abordar os jogos de soma nula do ponto de vista algébrico.

2.2 Representação matricial de jogos

Os métodos matriciais, nomeadamente as matrizes, podem ser usados para desenvolver estratégias "vencedoras" em jogos de soma nula.

Um dos elementos básicos de um jogo são os jogadores que nele participam. Além disso, cada jogador tem um conjunto de estratégias e, em termos matemáticos, podemos dizer que a cada jogador corresponde uma função que atribui o ganho do jogador, o qual denominamos por *payoff*, a cada situação de jogo,[1] isto é, em cada jogada.

Mais formalmente, num jogo existe um conjunto finito de jogadores, que representamos por $J = \{j_1, j_2, \ldots, j_n\}$ e cada jogador j_i possui um conjunto finito de estratégias, representado por $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{im_i}\}$, onde $m_i \in \mathbb{N}$, as quais denominamos por **estratégias puras**. Assim, cada situação de jogo pode ser representada pelo vetor $e = (e_{1k_1}, e_{2k_2}, \ldots, e_{nk_n})$, onde e_{ik_i}, com $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $k_i \in \{1, \ldots, m_i\}$, é uma estratégia pura do jogador j_i. Podemos ainda associar a cada jogador i, a função $g_i : E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}$ que a cada situação de jogo e associa o *payoff* desse jogador nessa situação de jogo, $g_i(e)$.

Vejamos um exemplo, possivelmente o mais conhecido na teoria dos jogos:

Exemplo 2.2.1 ("*Dilema dos prisioneiros*"[2]). *"Dois suspeitos, L e C, são capturados e acusados de um mesmo crime. Presos em celas separadas e sem poderem comunicar entre si, a polícia (que não tem provas suficientes para os condenar) oferece a ambos o mesmo acordo: cada um pode escolher entre confessar ou negar o crime. Se nenhum deles confessar, a polícia apenas pode condenar cada um a* 1 *ano de prisão. Se os dois confessarem, então ambos terão uma pena de* 5 *anos. Mas se um confessar e o outro negar, então o que confessou sairá em liberdade e o outro será condenado a* 10 *anos de prisão."*

Neste jogo, temos o conjunto dos jogadores $J = \{L, C\}$,[3] e as suas

[1] Em inglês o termo usado é *outcomes*.

[2] Foi formulado num seminário para psicólogos, por Albert Tucker em 1950, com o intuito de ilustrar a dificuldade de se analisar certos tipos de jogos.

[3] L e C foram escolhidos por serem as primeiras letras de linha e coluna.

possíveis estratégias puras $E_L = \{\text{confessar}, \text{negar}\} = E_C$. O conjunto de todas as situações de jogo possíveis é:

$$\begin{aligned} E_L \times E_C = &\{(\text{confessar}, \text{confessar}), (\text{confessar}, \text{negar}), \\ &(\text{negar}, \text{confessar}), (\text{negar}, \text{negar})\}. \end{aligned}$$

Os *payoffs* de cada jogador[4] são dados pelas funções $g_L : E_L \times E_C \to \mathbb{R}$ e $g_C : E_L \times E_C \to \mathbb{R}$ definidas por:

$$\begin{aligned} &g_L(\text{confessar}, \text{confessar}) = -5 && g_C(\text{confessar}, \text{confessar}) = -5 \\ &g_L(\text{confessar}, \text{negar}) = 0 && g_C(\text{confessar}, \text{negar}) = -10 \\ &g_L(\text{negar}, \text{confessar}) = -10 && g_C(\text{negar}, \text{confessar}) = 0 \\ &g_L(\text{negar}, \text{negar}) = -1 && g_C(\text{negar}, \text{negar}) = -1 \end{aligned}$$

Podemos representar esta informação das funções dos *payoffs* numa tabela, da seguinte forma:

	Suspeito C	
Suspeito L	**confessa**	**nega**
confessa	(-5,-5)	(0,-10)
nega	(-10,0)	(-1,-1)

Se omitirmos os cabeçalhos da tabela (desde que seja explícito a quem pertencem as estratégias representadas nas linhas e as representadas nas colunas), obtemos a matriz:

[4] Os *payoffs* foram definidos como números não positivos; desta maneira, minimizar o tempo de cadeia é equivalente a maximizar o *payoff*.

$$A = \begin{bmatrix} (-5,-5) & (0,-10) \\ (-10,0) & (-1,-1) \end{bmatrix}.$$

$\diamondsuit$

Sendo o número de situações de jogo igual ao produto do número de estratégias puras de um jogador pelo número de estratégias puras do outro jogador, e se restringirmos o número de jogadores a dois e supusermos que cada jogador tem um número finito de estratégias puras, uma forma prática de representar todas as situações, interações e *payoffs* dos jogadores é através de uma tabela de dupla entrada, ou seja, uma matriz.

Consideremos então um jogo com dois jogadores L e C, em que o jogador L tem n possíveis estratégias e o jogador C tem m. Podemos organizar a informação dos *payoffs* desse jogo da seguinte forma:

	Jogador C		
Jogador L	**estratégia 1**	$\cdots$	**estratégia m**
estratégia 1	*Payoff* se ambos escolhem a estratégia 1	$\cdots$	*Payoff* se L escolhe a estratégia 1 e C escolhe a estratégia m
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
estratégia n	*Payoff* se L escolhe a estratégia n e C escolhe a estratégia 1	$\cdots$	*Payoff* se L escolhe a estratégia n e C escolhe a estratégia m

Observemos que quando o jogador L escolhe a estratégia i e o jogador C escolhe a estratégia j, os *payoffs* do jogo após essa escolha são os valores da entrada (i,j) da tabela, com $i \in \{1,\ldots,n\}$ e $j \in \{1,\ldots,m\}$.

Usando a notação anteriormente apresentada, se $J = \{L, C\}$, $E_L = \{e_{L1}, \ldots, e_{Ln}\}$, $E_C = \{e_{C1}, \ldots, e_{Cm}\}$ e se representarmos as funções dos *payoffs* dos jogadores L e C por g_L e g_C, respetivamente, definimos a **matriz dos *payoffs*** como sendo:

$$A = \begin{bmatrix} (g_L(e_{L1}, e_{C1}), g_C(e_{L1}, e_{C1})) & \cdots & (g_L(e_{L1}, e_{Cm}), g_C(e_{L1}, e_{Cm})) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (g_L(e_{Ln}, e_{C1}), g_C(e_{Ln}, e_{C1})) & \cdots & (g_L(e_{Ln}, e_{Cm}), g_C(e_{Ln}, e_{Cm})) \end{bmatrix}.$$

Simplificando, se a matriz dos *payoffs* de um jogo é uma matriz $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ (assumindo que o jogador L tem as estratégias definidas nas linhas e o jogador C nas colunas), então cada entrada a_{ij} da matriz é um par ordenado (a_{ij}^L, a_{ij}^C), onde a_{ij}^K indica o *payoff* do jogador K: se $a_{ij}^K > 0$ significa que o jogador K ganha a_{ij}^K; se $a_{ij}^K < 0$ significa que o jogador K perde $-a_{ij}^K$, com $K \in \{L, C\}$.

Exemplo 2.2.2. Consideremos um jogo de dois jogadores cuja matriz dos *payoffs* é

$$A = \begin{bmatrix} (2, -2) & (-3, 3) \\ (0, 0) & (2, -2) \\ (-5, 5) & (10, -10) \end{bmatrix}.$$

Neste jogo existem seis situações de jogo. Por exemplo, se o jogador cujas estratégias estão associadas às linhas escolhe a primeira estratégia e o jogador associado às colunas escolhe a segunda, significa que o jogador L perde 3 e o jogador C ganha 3. É fácil verificar que, em qualquer situação de jogo, os interesses dos jogadores são exatamente opostos – quando o jogador L ganha, o jogador C perde o mesmo valor, e vice-versa e, portanto, é um jogo de soma nula.

$\diamondsuit$

2.3 Jogos de soma nula

De uma forma simples, um **jogo de soma nula** é um jogo onde o que um jogador ganha é igual ao total das perdas dos restantes jogadores. Este tipo de jogos carateriza-se pelas seguintes propriedades:

- cada jogador conhece não só as suas estratégias possíveis como também as dos seus adversários, bem como os *payoffs* que poderá obter (note-se que as estratégias para um jogador podem ou não ser as mesmas dos restantes jogadores).

- as decisões de cada jogador são tomadas individualmente sem haver comunicação entre os jogadores; em alguns jogos são mesmo anunciadas em simultâneo, para não colocar nenhum jogador em vantagem.

- cada jogador tenta sempre maximizar os seus ganhos (ou minimizar as suas perdas).

Alguns jogos clássicos de tabuleiro são exemplos de jogos de soma nula: póquer, xadrez, damas, jogo do galo, go, etc. No entanto, todos estes são difíceis de representar matricialmente dado o elevado número de estratégias possíveis para cada jogador.

Neste capítulo iremos apenas considerar o caso de jogos de soma nula que envolvam dois jogadores, L e C, com um número finito de estratégias cada um.

O próximo exemplo é um jogo de soma nula simples. É frequentemente usado como método de seleção (assim como o jogo de lançar moedas, jogar os dados, entre outros).

Exemplo 2.3.1 ("Papel–Tesoura–Pedra")**.** O jogo "Papel–Tesoura–Pedra" é um jogo de mãos para duas (ou mais) pessoas, que não requer equipamentos nem habilidade. Neste jogo, os jogadores devem simultaneamente esticar a mão e cada um deve formar um gesto: a mão aberta simboliza o papel, dois dedos esticados simbolizam a tesoura e o punho fechado simboliza a pedra, conforme a figura seguinte.

Caso dois jogadores façam o mesmo gesto, ocorre um empate e, geralmente, joga-se de novo até desempatar. Os jogadores comparam os gestos para decidir quem ganhou, da seguinte forma:

- a pedra ganha à tesoura, quebrando-a;
- a tesoura ganha o papel, cortando-o;
- o papel ganha à pedra, embrulhando-a.

Se considerarmos apenas dois jogadores, podemos mesmo construir a matriz dos *payoffs* deste jogo. Note-se que as estratégias de cada jogador são as mesmas, e assumindo que estão indicadas segundo a ordem papel–tesoura–pedra, obtemos:

$$A = \begin{bmatrix} (0,0) & (-1,1) & (1,-1) \\ (1,-1) & (0,0) & (-1,1) \\ (-1,1) & (1,-1) & (0,0) \end{bmatrix}.$$

Note-se que 0 significa que houve empate, 1 que ganha e -1 significa que perde.

Uma vez que se trata de um jogo de soma nula, podemos apenas representar os ganhos (ou as perdas) relativos a um dos jogadores. As perdas (ou os ganhos) do adversário serão inferidas a partir desses valores. Recorde-se que a soma dos dois *payoffs* de cada jogada é nula! Se representarmos apenas os *payoffs* do jogador cujas estratégias estão representadas nas linhas, a matriz dos *payoffs* simplificada deste jogo é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, se considerarmos a entrada $a_{21} = 1$ significa que o jogador cujas estratégias estão representadas nas linhas ganha. $\diamondsuit$

Assim, dado um jogo de soma nula com dois jogadores L e C, se considerarmos que as estratégias do jogador L estão representadas nas linhas, a sua matriz dos *payoffs* é $A = \begin{bmatrix} a_{ij} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, onde cada entrada a_{ij} é o *payoff* do jogador L quando L escolhe a estratégia i e C escolhe a estratégia j. Note-se que $-a_{ij}$ é o *payoff* do jogador C.

2.3.1 Valor maximin e valor minimax

A seleção da melhor estratégia por cada jogador é o problema básico quando se joga. O objetivo é saber como devem os jogadores selecionar as suas estratégias por forma a otimizar os seus *payoffs*.

A escolha da melhor estratégia para os jogos de soma nula baseia-se no Teorema minimax de von Neumann. Segundo este teorema, há sempre uma solução sensata para um conflito entre dois indivíduos cujos interesses são completamente opostos; mais, cada jogador deve escolher a estratégia que maximiza o seu ganho mínimo, ou, de forma equivalente, que minimiza o ganho máximo do adversário.

Mas como encontrar a melhor estratégia?

Consideremos um jogo de soma nula entre os jogadores L e C, representado por uma matriz dos *payoffs* cujas estratégias associadas às linhas correspondem às do jogador L.

O valor mínimo em cada linha representa o menor ganho do jogador L, se este escolher a estratégia associada a essa linha. De acordo com o Teorema minimax de von Neumann, o jogador L deve selecionar a estratégia que origina o ganho máximo entre os valores mínimos das linhas. Ao ganho correspondente a esta escolha do jogador L chamamos **valor maximin** do jogo. Será uma maximização do ganho mínimo – o jogador L joga para obter o maior lucro possível.

Para o jogador C, o máximo valor em cada coluna representa a perda máxima para ele, se escolher a estratégia associada a essa coluna. Assim, este jogador deve selecionar a estratégia que lhe dá a menor perda entre os valores máximos das colunas. A perda correspondente a esta escolha do jogador C é chamada de **valor minimax** do jogo. Será a estratégia que minimiza o ganho do adversário – o jogador C joga de forma a minimizar a sua perda.

Se o valor maximin for igual ao valor minimax, então as estratégias associadas são chamadas **estratégias ótimas** e dizemos que o jogo tem um **ponto de equilíbrio**.[5] Ao *payoff* correspondente ao ponto de equilíbrio chamamos **valor do jogo**.

Note-se que um jogo pode ter mais do que um ponto de equilíbrio ou não ter nenhum. As estratégias são ótimas, já que se um dos dois jogadores escolher outra estratégia, que não a ótima, o seu adversário poderá ultrapassar o valor do jogo, ganhando mais (ou perdendo menos).

É sensato que cada jogador escolha uma estratégia que maximiza o seu ganho mínimo, ou, de forma equivalente, que minimiza o ganho máximo do outro. Se a matriz do jogo tiver um ponto de equilíbrio, ambos os jogadores devem jogar a estratégia que o contém. Esta pode ser considerada a estratégia vencedora do jogo.

Mas como determinar o ponto de equilíbrio?

Exemplo 2.3.2. Consideremos um jogo de soma nula com dois jogadores, L e C, cujos *payoffs* do jogador L são representados pela seguinte matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 6 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

[5] O ponto de equilíbrio é também denominado **ponto de sela** (visualizando uma sela de montar, podemos ver duas curvas perpendiculares num ponto e esse ponto é o máximo de uma curva e o mínimo da outra).

O jogador L quer maximizar os seus ganhos. Quando ele escolhe a estratégia correspondente à primeira linha, pode ganhar 4 ou 3, dependendo da estratégia escolhida pelo jogador C. No entanto, ele pode garantir um ganho de, pelo menos, $\min\{4, 3\} = 3$, independente da escolha do jogador C. Analogamente, se escolher a estratégia da segunda linha, pode garantir um ganho de, pelo menos, $\min\{8, 6\} = 6$ e, se escolher a estratégia da segunda linha, pode garantir um ganho de, pelo menos, $\min\{5, 4\} = 4$. Assim, se o jogador L escolher a estratégia associada à segunda linha, ele maximiza o seu menor ganho (note-se que é o maior dos menores ganhos possíveis). O valor resultante desta escolha, 6, é o valor maximin.

Por outro lado, o jogador C deseja minimizar as suas perdas. Se escolher a estratégia associada à primeira coluna, não pode perder mais do que $\max\{4, 8, 5\} = 8$. Para estratégia associada à última coluna, a perda máxima é $\max\{3, 6, 4\} = 6$. Ora, o jogador C irá escolher a alternativa que minimize a sua máxima perda, o que neste caso representa a estratégia da última coluna (uma vez que é a menor das maiores perdas possíveis). O valor resultante, 6, desta estratégia é o valor minimax.

Como os valores maximin e minimax são iguais, o jogo tem um (único) ponto de equilíbrio na entrada $(2, 2)$ e 6 é o valor do jogo. $\diamondsuit$

Atendendo ao exemplo anterior, podemos esquematizar o método da determinação do ponto de equilíbrio de um jogo de soma nula, representado por uma matriz dos *payoffs* da seguinte forma:

- selecionar a entrada mínima de cada linha da matriz;

- selecionar a entrada máxima de cada coluna da matriz;

- se aparecer uma entrada da matriz marcada, simultaneamente, pelos passos anteriores, então esse elemento representa o valor do jogo e a sua posição é um ponto de equilíbrio.

Vejamos agora um exemplo de um jogo de soma nula com mais do que um ponto de equilíbrio.

Exemplo 2.3.3. Consideremos um jogo de soma nula cuja matriz dos *payoffs* é a seguinte:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & -20 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \\ -16 & 0 & 16 & 1 \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar que o valor maximin é igual a $\max\{2, -20, 2, -16\} = 2$ e o valor minimax é igual a $\min\{4, 2, 16, 2\} = 2$. E, portanto, existem quatro entradas que correspondem a pontos de equilíbrio: $(1, 2)$, $(1, 4)$, $(3, 2)$ e $(3, 4)$ e 2 é o valor do jogo. $\diamondsuit$

Teorema 2.3.4. *[26] Quaisquer dois pontos de equilíbrio numa matriz dos payoffs de um jogo de soma nula têm o mesmo valor.*

Demonstração. Seja $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times m}$ a matriz dos *payoffs* de um jogo de soma nula. Suponhamos, sem perda de generalidade, que as entradas a_{kl} e a_{rs}, para alguns $k, r \in \{1, \ldots, n\}$ e $l, s \in \{1, \ldots, m\}$, são entradas que correspondem a pontos de equilíbrio. Então, por definição de valor maximin, $a_{kl} \leq a_{ks}$ e $a_{rs} \leq a_{rl}$. Analogamente, e atendendo à definição de valor minimax, $a_{ks} \leq a_{rs}$ e $a_{rl} \leq a_{kl}$. Logo $a_{kl} = a_{rs}$. Note-se que a_{rl} e a_{ks} são entradas que correspondem a pontos de equilíbrio. $\square$

Veremos na próxima secção exemplos de matrizes de *payoffs* sem pontos de equilíbrio.

2.3.2 Estratégias mistas

Até aqui analisámos jogos em que cada jogador escolhe uma determinada estratégia de modo determinista, ou seja, não baseia a sua escolha na aleatoriedade e existe sempre, pelo menos, um ponto de equilíbrio. Dizemos que são jogos de estratégia pura.

No entanto, existem jogos que não possuem pontos de equilíbrio usando estratégias puras.

Exemplo 2.3.5 ("Matching pennies")**.** Neste jogo, temos dois jogadores L e C que mostram, simultaneamente, a moeda que cada um esconde na mão. Se ambas as moedas apresentam cara ou coroa, o jogador C dá a sua moeda ao jogador L. Se uma das moedas apresenta cara, e a outra apresenta coroa, é a vez do jogador L dar sua moeda ao jogador C. A matriz dos *payoffs* é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},$$

onde cada entrada é o *payoff* do jogador L. Assim, o valor maximin é -1 e o valor minimax é 1. Logo, não existe ponto de equilíbrio (aplicando apenas estratégias puras). $\diamondsuit$

De acordo com Deulofeu [8], "habitualmente, não existe uma estratégia pura dominante para cada jogador, isto é, uma estratégia pura que seja a melhor em todas as jogadas. Pelo contrário, os jogadores não podem revelar qual é a sua estratégia e tentam ocultá-la, recorrendo, se for preciso, à mistificação. É o caso do jogo do póquer, em que os jogadores tentam enganar os seus oponentes e só mostram as cartas quando é necessário."

Uma alternativa para estes casos é considerar o jogo do ponto de vista probabilístico, isto é, o jogador conhece a distribuição de probabilidade, sobre as suas estratégias puras. Por exemplo, se um apostador sabe que a seleção portuguesa de futebol vence 68% dos seus jogos, pode decidir apostar, para um único jogo, em cada dez apostas, sete na seleção portuguesa e três na seleção adversária, tentando assim um ganho maior do que se apostasse 100% das vezes na seleção portuguesa.

Definimos **estratégia mista** para um jogador como sendo uma distribuição de probabilidade sobre (algumas ou todas) as estratégias puras desse jogador.

Consideremos então um jogo de soma nula com dois jogadores, L e C, tais que os conjuntos das estratégias puras de cada um são representados, respetivamente, por $E_L = \{e_{L1}, e_{L2}, \dots, e_{Ln}\}$ e $E_C = \{e_{C1}, e_{C2}, \dots, e_{Cm}\}$. Seja ainda $A = \left[a_{ij}\right] \in \mathbb{R}^{n \times m}$ a matriz dos *payoffs* do jogador L.

Cada jogador irá fazer os seus movimentos numa base probabilística. Consideremos as seguintes notações:

- p_i representa a probabilidade do jogador L escolher a estratégia e_{Li}, com $i \in \{1, \dots, n\}$;

- q_j representa a probabilidade do jogador C escolher a estratégia e_{Cj}, com $j \in \{1, \dots, m\}$.

Pela teoria das probabilidades, sabemos que

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1 = q_1 + q_2 + \cdots + q_m.$$

Observemos que p_i e q_j são probabilidades independentes, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, e, portanto, $p_i q_j$ é a probabilidade, de numa situação de jogo, o jogador L escolher a estratégia e_{Li} e o jogador C escolher a estratégia e_{Cj}.

Consideremos os vetores $p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix}^T$ e $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{bmatrix}^T$.

Estes vetores são as estratégias mistas do jogador L e C, respetivamente.

Se multiplicarmos cada *payoff* pela respetiva probabilidade e somarmos todos esses resultados, obtemos o ***payoff* esperado** para o jogador L, quando são escolhidas as estratégias mistas p e q. Representamos esse valor por $P_L(p,q)$. Assim

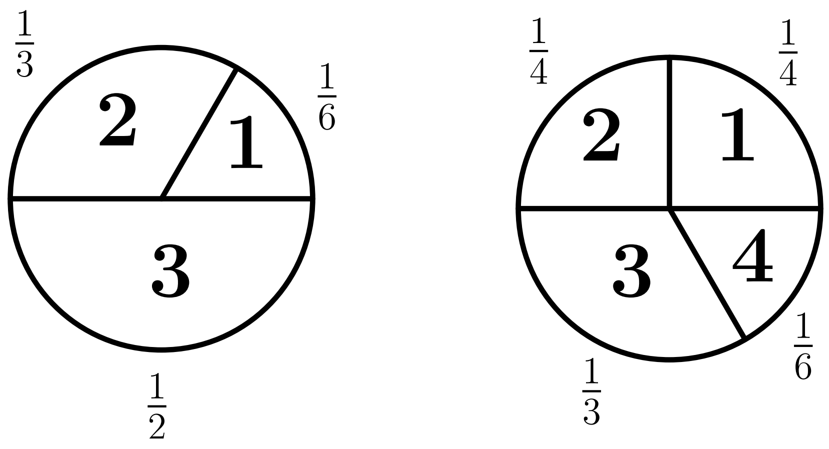
$$P_L(p,q) = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + \cdots + a_{1m}p_1q_m + a_{21}p_2q_1 + \cdots + a_{nm}p_nq_m.$$

É fácil verificar que o *payoff* esperado, em notação matricial, é dado por:

$$P_L(p,q) \quad = \quad p^T A q = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_m \end{bmatrix}.$$

Note-se que se $P_L(p,q)$ é o *payoff* esperado para o jogador L, $-P_L(p,q)$ é o *payoff* esperado para o jogador C, ou seja, $P_C(p,q) = -P_L(p,q)$.

Exemplo 2.3.6 ("Roda da Sorte")**.** Consideremos um jogo de soma nula com dois jogadores L e C, onde cada jogador tem uma roda estacionária com um ponteiro móvel fixo no seu centro. A roda do jogador L está dividida em três setores numerados com 1, 2 e 3 e a roda do jogador C está dividida em quatro setores 1, 2, 3 e 4. Os diferentes setores têm diferentes áreas, como mostra a figura.



Cada jogador gira o ponteiro da sua roda, pondo-o em movimento, até parar aleatoriamente. Se considerarmos que as estratégias de cada jogador são os respetivos setores da roda correspondente, o jogador L tem três estratégias possíveis e o jogador C tem quatro. A matriz dos *payoffs* do jogador L é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Por exemplo, se o ponteiro da roda do jogador L para no setor 1 e o ponteiro da roda do jogador C para no setor 2, então o jogador L acumula 5 pontos e o jogador C acumula -5 pontos.

Neste jogo, os jogadores não têm controlo sobre os seus movimentos e a escolha de cada estratégia é determinada pela sorte.

Sejam p_i a probabilidade do jogador L escolher a estratégia i e q_j a probabilidade do jogador C escolher a estratégia j, com $i \in \{1,2,3\}$ e $j \in \{1,2,3,4\}$. Então, pela figura anterior, temos que:

$$p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_2 = \frac{1}{3}, \quad p_3 = \frac{1}{2}, \quad q_1 = \frac{1}{4}, \quad q_2 = \frac{1}{4}, \quad q_3 = \frac{1}{3} \quad \text{e} \quad q_4 = \frac{1}{6}.$$

O *payoff* esperado para o jogador L é dado por:

$$P_L(p,q) = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & -3 & -4 \\ 6 & -5 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix} = \frac{13}{72} \approx 0,18.$$

É esperado que, no final do jogo (ao fim de várias jogadas), o jogador L receba uma média de $0,18$ por jogo. ♢

Consideremos agora uma situação diferente. Suponhamos que ambos os jogadores podem mudar as suas estratégias mistas, ou seja, se por exemplo no jogo acima considerado for permitido, a ambos os jogadores, alterar as áreas dos setores das suas rodas e, consequentemente, as probabilidades dos seus movimentos.

É evidente que cada jogador irá escolher a melhor estratégia mista possível.

Para ver que tais escolhas são possíveis, recorremos ao seguinte teorema:

Teorema 2.3.7 (Teorema minimax de von Neumann[6]). *[21] Existem estratégias mistas p^* e q^* tais que*

$$P_L(p^*,q) \geq P_L(p^*,q^*) \geq P_L(p,q^*),$$

para quaisquer estratégias mistas p e q. Além disso,

$$\min_q \left(\max_p P_L(p,q) \right) = P_L(p^*,q^*) = \max_p \left(\min_p P_L(p,q) \right).$$

A demonstração deste teorema envolve a teoria de programação linear e por isso será omitida, podendo ser consultada em [21].

[6]Também conhecido por Teorema fundamental para jogos de soma nula com dois jogadores.

Observemos que p^* e q^* são as melhores estratégias mistas que os jogadores L e C, respetivamente, devem escolher.

Se considerarmos $v = P_L(p^*, q^*)$ então $P_L(p^*, q) \geq v$, para qualquer estratégia mista q. Isto significa que, se o jogador L escolhe a estratégia mista p^* então, independentemente da estratégia mista q que o jogador C escolher, o *payoff* esperado para o jogador L nunca será menor do que v.

Assim, às estratégias mistas p^* e q^*, definidas no teorema anterior, chamamos, respetivamente, **estratégias mistas ótimas** para os jogadores L e C, respetivamente. O *payoff* $P_L(p^*, q^*)$ é o valor do jogo.

Analogamente ao que foi visto para jogos de soma nula com estratégias puras, dois pares de estratégias mistas ótimas dão origem ao mesmo valor de jogo. Ou seja, se (p^*, q^*), (p^{**}, q^{**}) são pares de estratégias mistas ótimas, então $P_L(p^*, q^*) = P_L(p^{**}, q^{**})$.

O Teorema 2.3.7 permite provar que, quando um jogo de soma nula tem ponto de equilíbrio, as estratégias mistas ótimas são as estratégias puras ótimas. De facto, suponhamos que uma matriz A tem um ponto de equilíbrio na entrada (r, s), as estratégias mistas ótimas p^* e q^* são:

$$p^* = \left[\delta_j^r\right] \in \mathbb{R}^{n\times 1} \qquad \text{e} \qquad q^* = \left[\delta_j^s\right] \in \mathbb{R}^{m\times 1}$$

onde $\delta_j^k = \begin{cases} 1 \text{ se } j = k \\ 0 \text{ se } j \neq k \end{cases}$, para $k \in \{r, s\}$.

Se p^* e q^* são estratégias mistas definidas como anteriormente, então $P_L(p^*, q^*) = (p^*)^T Aq^* = a_{rs}$. Além disso, para qualquer estratégia mista q e para qualquer estratégia mista p, temos que

$$P_L(p^*, q) = (p^*)^T Aq \geq a_{rs} = P_L(p^*, q^*)$$

e

$$P_L(p, q^*) = p^T Aq^* \leq a_{rs} = P_L(p^*, q^*),$$

ou seja,

$$P_L(p^*, q) \geq P_L(p^*, q^*) \geq P_L(p, q^*),$$

para quaisquer estratégias mistas p e q. Logo, p^* e q^* são estratégias mistas ótimas.

Iremos ver, de seguida, como determinar as estratégias mistas ótimas em jogos de soma nula em que cada jogador apenas tem duas estratégias puras.

Caso particular: matrizes dos ***payoffs*** do tipo 2×2

Suponhamos então que estamos perante um jogo de soma nula cuja matriz dos *payoffs* é uma matriz 2×2, ou seja, cada jogador tem somente duas estratégias puras possíveis:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que as estratégias mistas do jogador L e do jogador C são, respetivamente, $p = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 \end{bmatrix}^T$ e $q = \begin{bmatrix} q_1 & q_2 \end{bmatrix}^T$, onde $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$ e $p_i, q_i \geq 0$, para $i \in \{1, 2\}$.

O *payoff* esperado para o jogador L é dado por:

$$P_L(p, q) = p^T A q = a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + a_{22}p_2q_2.$$

Como $p_2 = 1 - p_1$ e $q_2 = 1 - q_1$, substituindo obtemos:

$$\begin{aligned} P_L(p, q) &= a_{11}p_1q_1 + a_{12}p_1(1 - q_1) + a_{21}(1 - p_1)q_1 + a_{22}(1 - p_1)(1 - q_1) \\ &= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})\, p_1q_1 + (a_{21} - a_{22})\, q_1 + (a_{12} - a_{22})\, p_1 + a_{22}, \end{aligned}$$

com $p_1, q_1 \in [0, 1]$.

Suponhamos que o jogador L sabe que o jogador C vai adotar a estratégia mista q'. O jogador L tenta maximizar o seu ganho e para tal deve escolher uma estratégia mista p' tal que $P_L(p', q') = \max_p P_L(p, q')$. A melhor escolha para o jogador C seria adotar a estratégia mista q' tal que:

$$\max_p P_L(p, q') = \min_q \left(\max_p P_L(p, q) \right).$$

Este *payoff* é o máximo *payoff* que o jogador L pode obter se C adotar a estratégia mista q'.

Analogamente, suponhamos agora que o jogador C sabe que o jogador L irá escolher a estratégia mista p'. A estratégia mista ótima para o jogador C seria escolher q' tal que $P_L(p', q') = \min_q P_L(p', q)$. E assim, a melhor escolha para o jogador L seria adotar a estratégia mista p' tal que

$$\min_q P_L(p', q) = \max_p \left(\min_q P_L(p, q) \right).$$

A existência destas estratégias mistas p' e q' é assegurada pelo Teorema 2.3.7, de tal forma que, para todas as estratégias mistas p e q:

$$P_L(p', q) \geq v \quad \text{e} \quad P_L(p, q') \leq v$$

se e somente se

$$\min_q \left(\max_p P_L(p, q) \right) = v = \max_p \left(\min_q P_L(p, q) \right),$$

onde v é o valor do jogo.

Assim, para determinar as estratégias mistas ótimas, basta encontrar um ponto de sela da função $P_L(p, q)$, analisando-a como função nas variáveis p_1 e q_1.[7]

[7]No Apêndice C, é possível recordar, de forma sucinta, o estudo de pontos críticos de funções reais de duas variáveis reais.

O gradiente dessa função é

$$\left(\left(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\right)q_1+\left(a_{12}-a_{22}\right),\left(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\right)p_1+\left(a_{21}-a_{22}\right)\right).$$

Se $a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\neq 0$, o único ponto crítico é o ponto (p_1^*,q_1^*), com

$$p_1^*=\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}} \quad \text{e} \quad q_1^*=\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}.$$

Para verificar se o ponto (p_1^*,q_1^*) é um ponto de sela, temos que estudar o sinal do seu Hessiano:

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} \\ a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22} & 0 \end{vmatrix} = -\left(a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}\right)^2<0$$

Logo, o ponto (p_1^*,q_1^*) é um ponto de sela da função $P_L(p,q)$. Note-se que se considerarmos $p^*=\begin{bmatrix} p_1^* & 1-p_1^* \end{bmatrix}^T$, temos que:

$$\begin{aligned} P_L(p^*,q) &= \left(a_{12}-a_{22}\right)\frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}+a_{22} \\ &= \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}, \end{aligned}$$

ou seja, o *payoff* esperado para o jogador L é independente de q, isto é, é independente qualquer que seja a estratégia mista escolhida pelo jogador C. Por outro lado, se escolhermos uma estratégia mista $q^*=\begin{bmatrix} q_1^* & 1-q_1^* \end{bmatrix}^T$ e, substituindo no *payoff* esperado do jogador L, obtemos:

$$\begin{aligned} P_L(p,q^*) &= \left(a_{21}-a_{22}\right)\frac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}+a_{22} \\ &= \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}}. \end{aligned}$$

Assim $P_L(p^*,q)=P_L(p,q^*)$, para quaisquer estratégias mistas p e q. Donde se deduz que as estratégias mistas anteriormente determinadas, isto é,

$$p^*=\begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}} \\ \\ \dfrac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad q^*=\begin{bmatrix} \dfrac{a_{22}-a_{12}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}} \\ \\ \dfrac{a_{11}-a_{21}}{a_{11}-a_{12}-a_{21}+a_{22}} \end{bmatrix}$$

são estratégias mistas ótimas para os jogadores L e C, respetivamente. Além disso, o valor do jogo é

$$v = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}.$$

Suponhamos agora que $a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 0$.

Então o *payoff* esperado para ao jogador L é dado por

$$P_L(p, q) = (a_{21} - a_{22})\, q_1 + (a_{12} - a_{22})\, p_1 + a_{22},$$

com $p_1, q_1 \in [0, 1]$.

O gradiente desta função é dado por $(a_{12} - a_{22}, a_{21} - a_{22})$. É fácil verificar que, se $a_{22} = a_{12} = a_{21}$, então todos os pontos $(p_1, q_1) \in [0, 1] \times [0, 1]$ são pontos críticos da função e como, neste caso, a função é constante, são pontos de sela. Portanto, quaisquer estratégias mistas adotadas pelos jogadores L ou C são ótimas.

Exemplo 2.3.8 ("Par ou ímpar")**.** Consideremos o jogo de soma nula entre dois jogadores, L e C, em que cada jogador mostra, ao mesmo tempo, um ou dois dedos. Suponhamos que a matriz dos *payoffs* do jogador L é

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}.$$

É fácil verificar que esta matriz dos *payoffs* não tem ponto de equilíbrio, portanto, não existe uma estratégia pura ótima para cada jogador. Vejamos como, neste caso, é possível estabelecer uma estratégia mista ótima que permita determinar o valor do jogo. Tal como foi visto, para construir uma estratégia mista, atribuímos a cada estratégia pura uma probabilidade (que indica a frequência com que cada estratégia pura será jogada). Neste jogo, o jogador L tem duas estratégias puras ("mostrar um dedo" e " mostrar dois dedos") e o jogador C tem as mesmas estratégias puras.

Consideremos que a estratégia mista do jogador L é o vetor $p = \begin{bmatrix} p_1 & 1-p_1 \end{bmatrix}^T$ e o jogador C tem como estratégia mista $q = \begin{bmatrix} q_1 & 1-q_1 \end{bmatrix}^T$, com $0 \leq p_1 \leq 1$ e $0 \leq q_1 \leq 1$. Isto significa, por exemplo, que o jogador L mostra um dedo com probabilidade p_1 e o jogador C fá-lo com probabilidade q_1.

De acordo com o que foi visto anteriormente, o *payoff* esperado do jogador L é dado por

$$P_L(p_1, q_1) = p^T A q = 12p_1q_1 - 7q_1 - 7p_1 + 4.$$

De acordo com o Teorema 2.3.7, temos que determinar p_1 e q_1 tais que $\min\limits_{q_1}\left(\max\limits_{p_1} P_L(p_1, q_1)\right) = \max\limits_{p_1}\left(\min\limits_{q_1} P_L(p_1, q_1)\right)$, ou seja, queremos determinar o ponto de sela da função $P_L(p_1, q_1)$, enquanto função nas variáveis p_1 e q_1.

Assim, o ponto $(p_1, q_1) = \left(\dfrac{7}{12}, \dfrac{7}{12}\right)$ é o ponto de sela dessa função e $p^* = q^* = \begin{bmatrix} \frac{7}{12} & \frac{5}{12} \end{bmatrix}^T$ são as estratégias mistas para os jogadores L e C, respetivamente.

O valor do jogo é $v = -\dfrac{1}{12}$. Trata-se, portanto, de um jogo favorável ao jogador C. $\diamondsuit$

Para jogos de soma nula cuja matriz dos *payoffs* é do tipo $n \times m$ (com $n, m \geq 2$), é possível provar que a "solução" do jogo é a solução com as estratégias mistas de um dos seus subjogos 2×2, isto é, jogos cuja matriz dos *payoffs* é uma submatriz 2×2 da matriz inicial. Como pode existir um grande número de subjogos 2×2, para tentar encontrar a solução, existe uma técnica gráfica, que sai fora do âmbito do nosso trabalho.[1]

2.4 Considerações finais

Em todos os casos considerados, pressupôs-se uma condição que pode ser designada por "comportamento razoável" dos dois jogadores. Este comportamento consiste em considerar que cada jogador supõe que o seu adversário atuará sempre de modo a salvaguardar os seus próprios interesses e aplicará a estratégia mais indicada para que isso aconteça.

A solução apresentada por von Neumann está limitada a jogos de soma nula, que não correspondem à maioria dos conflitos de interesse, principalmente em decisões económicas e sociais. Jogos nestas áreas costumam apresentar somas não constantes e são chamados jogos de soma não nula.

Esta restrição foi ultrapassada pelo trabalho desenvolvido por John Nash durante a década de 50. De acordo com Nash, todos os jogos de soma não nula com dois jogadores apresentam pelo menos um equilíbrio, em estratégia mista ou pura.

Este, conhecido por equilíbrio de Nash ou equilíbrio cooperativo, representa uma situação de jogo em que nenhum jogador pode melhorar a sua situação, dada a estratégia seguida pelo jogador adversário, ou seja, corresponde à situação de jogo, na qual cada jogador, fazendo uso da estratégia adequada, garante um ganho mínimo.[21]

Um exemplo de um jogo de soma não nula que já foi referido anteriormente é o *Dilema dos prisioneiros* (para todas as estratégias possíveis, a soma dos *payoffs* é diferente de zero). Trata-se de uma jogo em que existe a possibilidade de cooperação ou de perda mútua. O facto de ações racionais individuais levarem a um mau resultado em termos de interesse próprio é o motivo da importância deste dilema em questões sociais, uma vez que esta situação se pode considerar uma simplificação de conflitos sociais.

No *Dilema dos prisioneiros*, o equilíbrio de Nash corresponde à situação de jogo na qual nenhum dos prisioneiros confessa. Isto pode ser observado na matriz dos *payoffs*, pois quando tal acontece, ambos os prisioneiros têm um ganho “mínimo”: o número total de anos que os dois passarão na prisão é menor do que nos outros casos.

Apêndice A

Grupo dos binários

Os números inteiros positivos podem ser representados em qualquer sistema de numeração de base inteira positiva. É usual o sistema de numeração baseado na base 10 (com 10 dígitos diferentes). Mas os computadores, por exemplo, pelo facto de só representarem dois valores, os dígitos binários 0 e 1, trabalham em sistema de numeração de base 2.

Na conversão de um número inteiro positivo na base decimal para a base 2, o método mais direto é efetuar a divisão sucessiva da parte inteira desse número por 2, sendo os restos obtidos em cada uma dessas divisões, os dígitos da base 2 (a começar com o menos significativo), até o quociente da divisão ser 0.

Exemplo A.0.1. Dado o número 14, na divisão inteira por 2 obtemos:

dividendo	**quociente**	**resto**
14	7	0
7	3	1
3	1	1
1	0	1

Assim $14 = 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0$ e assim escrevemos $14 = (1110)_2$.

$\diamondsuit$

Seja $x \in \mathbb{N}_0$. Se $x = x_m 2^m + x_{m-1}2^{m-1} + \cdots + x_1 2 + x_0$, com $x_i \in \{0, 1\}$, para cada $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$. Então escrevemos $x = (x_m, x_{m-1}, \ldots, x_1, x_0)_2$.

Dados dois números inteiros não negativos $x = (x_m, x_{m-1} \ldots, x_1, x_0)_2$ e $y = (y_m, y_{m-1}, \ldots, y_1, y_0)_2$, a **soma–Nim** de x com y, denetoda por $x \oplus y$, é dada por $z = x \oplus y$, onde $z = (z_m, z_{m-1}, \ldots, z_1, z_0)_2$ com $z_k = x_k +_2 y_k$, para todo $k \in \{0, 1, \ldots, m\}$ e

$+_2$	0	1
0	0	1
1	1	0

A soma–Nim goza das seguintes propriedades:

Associatividade

Dados inteiros x, y e z quaisquer tais que $x = (x_m, \ldots, x_0)_2$, $y = (y_m, \ldots, y_0)_2$ e $z = (z_m, \ldots, z_0)_2$, então:

$$\begin{aligned}
x \oplus (y \oplus z) &= (x_m, \ldots, x_0)_2 \oplus ((y_m, \ldots, y_0)_2 \oplus (z_m, \ldots, z_0)_2) \\
&= (x_m, \ldots, x_0)_2 \oplus (y_m +_2 z_m, \ldots, y_0 +_2 z_0)_2 \\
&= (x_m +_2 (y_m +_2 z_m), \ldots, x_0 +_2 (y_0 +_2 z_0))_2 \\
&= ((x_m +_2 y_m) +_2 z_m, \ldots, (x_0 +_2 y_0) +_2 z_0)_2 \\
&= (x_m +_2 y_m, \ldots, x_0 +_2 y_0)_2 \oplus (z_m, \ldots, z_0)_2 \\
&= ((x_m, \ldots, x_0)_2 \oplus (y_m, \ldots, y_0)_2) \oplus (z_m, \ldots, z_0)_2 \\
&= (x \oplus y) \oplus z
\end{aligned}$$

Comutatividade

Dados inteiros x e y quaisquer tais que $x = (x_m, \ldots, x_0)_2$ e $y = (y_m, \ldots, y_0)_2$, então:

$$\begin{aligned}
x \oplus y &= (x_m, \ldots, x_0)_2 \oplus (y_m, \ldots, y_0)_2 \\
&= (x_m +_2 y_m, \ldots, x_0 +_2 y_0)_2 \\
&= (y_m +_2 x_m, \ldots, y_0 +_2 x_0)_2 \\
&= (y_m, \ldots, y_0)_2 \oplus (x_m, \ldots, x_0)_2 \\
&= y \oplus x
\end{aligned}$$

O elemento neutro é $0 = (0, \ldots, 0)_2$

Dado um inteiro x qualquer tal que $x = (x_m, \ldots, x_0)_2$, então

$$\begin{aligned}
x \oplus 0 &= (x_m, \ldots, x_0)_2 \oplus (0, \ldots, 0)_2 \\
&= (x_m +_2 0, \ldots, x_0 +_2 0)_2 \\
&= (x_m, \ldots, x_0)_2 \\
&= x
\end{aligned}$$

Cada número é inverso de si próprio

Dado um inteiro x qualquer tal que $x = (x_m, \ldots, x_0)_2$, então

$$\begin{aligned}
x \oplus x &= (x_m, \ldots, x_0)_2 \oplus (x_m, \ldots, x_0)_2 \\
&= (x_m +_2 x_m, \ldots, x_0 +_2 x_0)_2 \\
&= (0, \ldots, 0)_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

E, provamos assim que o conjunto $\mathbb{N}_0$ munido da soma–Nim é um grupo abeliano. Resta mostrar que é válida a lei do corte.

Lei do corte

Dados inteiros x, y e z quaisquer, então:

$$\begin{aligned}
x \oplus y = z \oplus y &\Leftrightarrow (x \oplus y) \oplus y = (z \oplus y) \oplus y && \text{por definição de soma–Nim}\\
&\Leftrightarrow x \oplus (y \oplus y) = z \oplus (y \oplus y) && \text{pela associatividade da soma–Nim}\\
&\Leftrightarrow x \oplus 0 = z \oplus 0 && \text{por definição de inverso de um elemento}\\
&\Leftrightarrow x = z && \text{por definição de elemento neutro}
\end{aligned}$$

Apêndice B

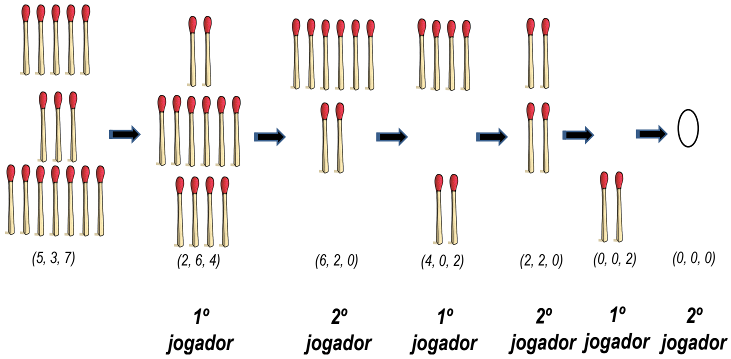
Outras variantes do jogo do Nim

Tal como o jogo do Nim, as suas variantes tratam-se de jogos de dois jogadores em que cada um, alternadamente, retira ou adiciona peças a pilhas. Caracterizam-se por terem uma determinada configuração inicial de peças e têm regras muito simples.

Lim

Jogo com 3 pilhas de peças. Em cada jogada, o jogador escolhe 2 pilhas e retira o mesmo número de peças de cada uma delas e adiciona esse número à terceira pilha. Perde o jogador que não conseguir jogar na sua vez, por encontrar duas pilhas vazias. [22]

Exemplo B.0.2. Considerando a combinação inicial de peças $(5, 3, 7)$, vejamos um possível desenvolvimento do jogo do Lim:



◇

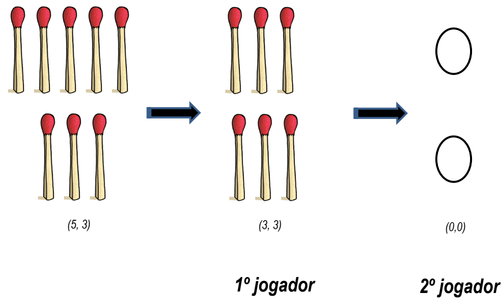
Whitoff–II Nim

Jogo com 2 pilhas de peças. Em cada jogada, cada jogador tem duas possibilidades:

- escolhe uma das pilhas e retira, pelo menos, uma peça, podendo também retirar todas as peças da pilha;
- retira o mesmo número de peças de ambas as pilhas.

Ganha o jogador que retirar a última peça. [22]

Exemplo B.0.3. Considerando a combinação inicial de peças $(5, 3)$, vejamos um possível desenvolvimento do jogo Whitoff–II:

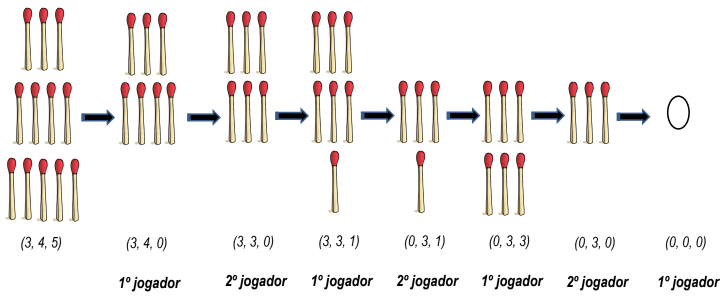


◇

Póquer Nim

Jogo muito semelhante ao jogo do Nim clássico, no entanto, neste caso, os jogadores, em cada jogada, podem optar por retirar ou adicionar peças a uma das pilhas, sendo que as pilhas nunca poderão ter um número de peças superior ao número inicial. Ganha o jogador que retirar a última peça. [25]

Exemplo B.0.4. Considerando a combinação inicial de peças $(3, 4, 5)$, vejamos um possível desenvolvimento do jogo Póquer Nim:



◊

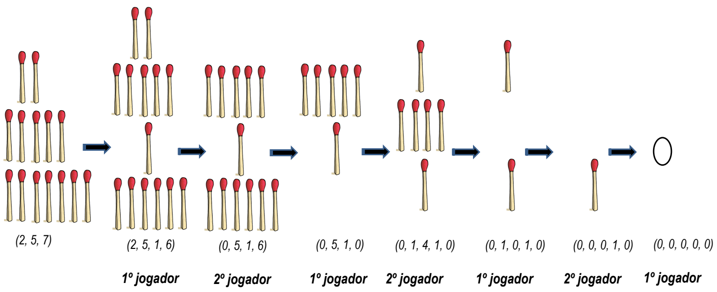
Lasker's Nim

Jogo semelhante ao jogo do Nim clássico, no entanto, em cada jogada, cada jogador tem duas possibilidades:

- retirar qualquer número de peças de uma só pilha;
- dividir qualquer uma das pilhas em duas, não sendo removidas peças.

Ganha o jogador que retirar a última peça. [9]

Exemplo B.0.5. Considerando a combinação inicial de peças $(2, 5, 7)$, vejamos um possível desenvolvimento do jogo Laker's Nim:



$\diamondsuit$

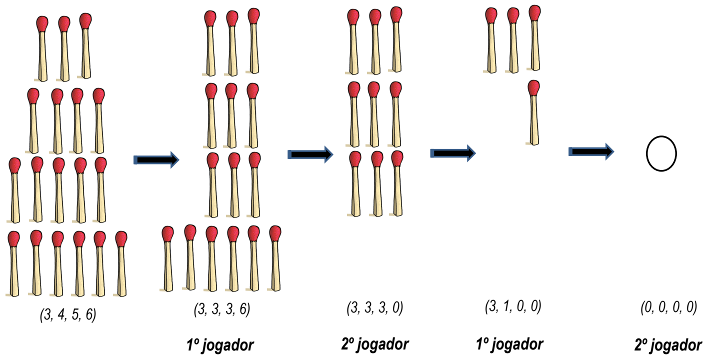
Moore's Nim

Jogo que, em cada jogada, cada jogador pode retirar qualquer número de peças de k pilhas, com k fixo, tendo obrigatoriamente que retirar, pelo menos, uma peça em cada jogada. [18]

Por exemplo, se $k = 1$, a situação reduz ao jogo do Nim clássico com uma pilha. Se considerarmos $k = 2$, é possível retirar peças de, no máximo, 2 pilhas.

Ganha o jogador que retirar a última peça.

Exemplo B.0.6. Considerando a combinação inicial de peças $(3, 4, 5, 6)$, vejamos um possível desenvolvimento do jogo Moore's Nim:



$\diamondsuit$

Leonardo Nim

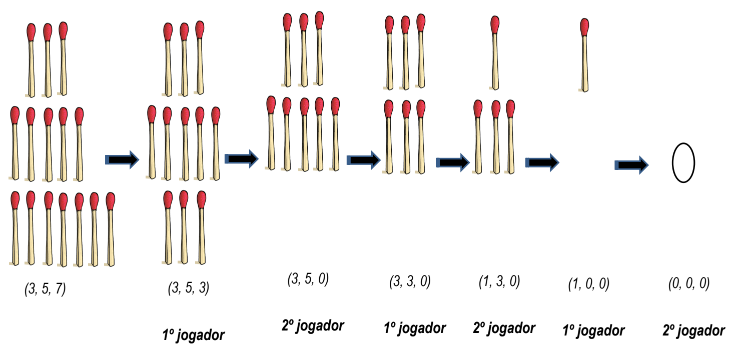
Jogo que generaliza o jogo Fibonacci Nim jogado com qualquer número de pilhas de peças. Em cada jogada, cada jogador tem de remover peças de uma das pilhas, obedecendo às seguintes regras:

- caso ainda não tenham sido retiradas peças de uma pilha, então não se pode retirar o número total de peças dessa pilha;

- caso já tenham sido removidas peças de uma pilha, então pode retirar-se, no máximo, o dobro do número de peças retirado na jogada anterior.

Ganha o jogador que remover a última peça. [17]

Exemplo B.0.7. Considerando a combinação inicial de peças $(3, 5, 7)$, vejamos um possível desenvolvimento do jogo Leonardo Nim:

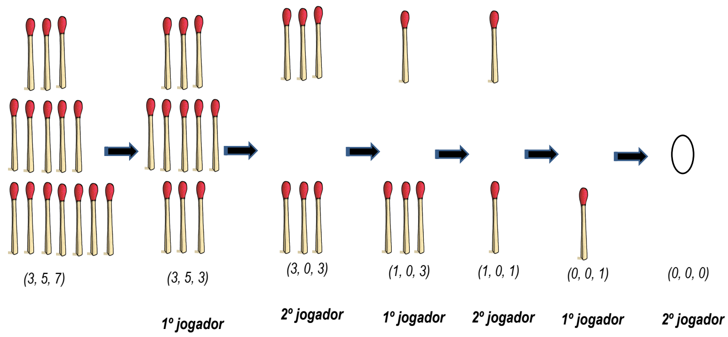


$\diamondsuit$

Pisano Nim

Jogo muito idêntico ao jogo Leonardo Nim, com uma alteração na primeira regra: caso ainda não tenham sido retiradas peças de uma pilha, então pode retirar-se qualquer número de peças dessa pilha, ou mesmo o número total de peças da pilha. [17]

Exemplo B.0.8. Considerando a combinação inicial de peças $(3, 5, 7)$, vejamos um possível desenvolvimento do jogo Pisano Nim:



$\diamondsuit$

Apêndice C

Extremos de uma função real de duas variáveis reais

Seja f uma função real de duas variáveis definida em $D_f \subseteq \mathbb{R}^2$ e seja $(a,b) \in D_f$.

Dizemos que (a,b) é um **maximizante local** (respetivamente, **minimizante local**) de f se, para todo (x,y) pertencente a uma vizinhança de (a,b), temos

$$f(a,b) \geq f(x,y) \qquad\qquad \text{(respetivamente, } f(a,b) \leq f(x,y)\text{)}$$

e dizemos que (a,b) é um extremante da função f. Ao valor $f(a,b)$ chamamos **máximo local** (respetivamente, **mínimo local**)

Suponhamos que f admite derivadas parciais de ordem 1. Definimos **gradiente de** f, que denotamos por ∇f, como sendo

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

Dizemos que o ponto (a,b) é candidato a extremante de função f se satisfizer uma das seguintes condições:

- (a, b) é um ponto crítico de f, isto é, $\nabla f(a, b) = (0, 0)$;
- (a, b) é um ponto onde f não é diferenciável ;
- (a, b) é um ponto da fronteira do domínio de f.

Vejamos apenas o estudo dos pontos críticos.[1]

Seja (a, b) um ponto crítico da função f e suponhamos que f admite derivadas parciais de 2ª ordem contínuas numa vizinhança de (a, b). Considere-se ainda o seguinte determinante, ao qual chamamos **Hessiano**:

$$H(a,b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) \end{vmatrix}.$$

Então

- se $H(a, b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0$, então (a, b) é um minimizante (local) de f;
- se $H(a, b) > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0$, então (a, b) é um maximizante (local) de f;
- se $H(a, b) < 0$, então (a, b) é um ponto de sela de f;
- se $H(a, b) = 0$, nada se pode concluir.

Exemplo C.0.9. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y.$$

Para determinar a existência de pontos de extremos, vamos começar por determinar o gradiente da função e igualar este a zero:

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}.$$

[1] O estudo dos pontos da fronteira e dos pontos onde a função não é diferenciável é feito caso a caso.

Logo $(1,2)$ é um ponto crítico de f.

Como $H(x,y) = 4 > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 > 0$, para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, então $(1,2)$ é um minimizante (local) de f. $\diamondsuit$

Bibliografia

[1] H. Anton, C. Rorres, *Álgebra linear com aplicações*, 8ª edição, Bookman · Porto Alegre; 2001.

[2] J. A. Bondy, U. S. R. Murty, *Graph theory with applications*, Elsevier · New York; 1976.

[3] C. L. Bouton, Nim, a game with a complete mathematical theory, *Ann. Math.* 3 (1902), 35-39.

[4] W. K. Burke, T. Shang-Hua, *Games on the Sperner Triangle*, Boston University · Boston; 2008.

[5] P. Cameron, *Combinatorics: Topics, techniques, algorithms*, Cambridge University Press · Cambridge; 1994.

[6] S. Campelos, Lemas combinatórios, *Monografia* Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (1999).

[7] D. Cardoso, J. Szymanski, M. Rostami, *Matemática Discreta*, Escolar Editora · Lisboa; 2008.

[8] J. Deulofeu, *Prisioneiros com dilemas e estratégias dominantes*, Teoria dos jogos. O mundo é matemático. RBA Coleccionables · Barcelona; 2008.

[9] T. S. Ferguson, *Game theory*, Departamento de Matemática da Universidade da Califórnia · Los Angeles; 2005.

[10] R. Fiani, *Teoria dos jogos: com aplicações em economia, administração e ciências sociais*, 2ª edição, Editora Campus · São Paulo; 2006.

[11] M. Gardner, *Divertimentos matemáticos*, 2ª edição, Editora IBRASA · São Paulo; 1967.

[12] R. A. Gómez et al., El teorema del punto fijo sin homología: un enfoque combinatorio, *La Gaceta de la RSME* volume 10, 1 (2007), 53-70.

[13] F. Harary, *Graph theory*, Addison-Wesley · Boston; 1969.

[14] M. Knorps, Nim and combinatorial games on graphs, Faculty of Applied Physics and Mathematics, Gdansk University of Techology, Polónia.

[15] J. M. Martinéz et al., Problemas minimax e aplicações, *Matemática Universitária*, 16 (1994), Departamento de Matemática Aplicada IMECC – UNICAMP, São Paulo.

[16] E. Mead, A. Rosa, C. Huang, The game of SIM: A winning strategy for the second player,*Mathematics Magazine* volume 47, 5 (1974), 243-247.

[17] M. Meyer, *Nim-values in fibonacci nim*, University of Minnesota Morris · Minnesota; 2010.

[18] E. H. Moore, A generalization of the game called nim, *The Annals of Mathematics, Second Series* volume 11, 3 (1910), 93-94.

[19] P. E. Morinaga, *A utilização de jogos no ensino da matemática*, Centro de Ciências Exactas e de Tecnologia, Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos · São Carlos; 2003.

[20] H. Rodrigues e J. Silva. O jogo do nim e os conceitos de mdc e mmc, 2004. VIII Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática: Um compromisso social, Recife, 15 a 18 de julho. Universidade Federal de Pernambuco.

[21] B. A. Sartini et al. Uma introdução à teoria de jogos, 2004. II Bienal da SBM. Universidade Federal da Bahia (25 a 29 de outubro).

[22] J. N. Silva. Jogos matemáticos, 2003. Auditório Municipal de Óbidos (7 de junho)

[23] J. N. Silva, J. P. Neto, *Jogos matemáticos, jogos abstractos*, Biblioteca Desafios Matemáticos, RBA Coleccionables · Barcelona; 2008.

[24] W. Slany, *Graph ramsey games*, Institut Fur Informationssysteme, Absteilung Datanbanken und Artificial Intelligence · Vienna, Austria; 1999

[25] B. Stengel, *Game theory basics*, Department of Mathematics, London School of Economics · London; 2008

[26] P. Straffin, *Game Theory and Strategy*, Mathematical Association of America · Washington DC; 1993.

[27] M. J. Whinihan, Fibonacci nim, *Fibonacci Quart.* volume 1, 4 (1963), 9-13.

[28] E. Zeckendorf, Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, *Bull. Soc. R. Sci. Liège* 41 (1972), 179-182.

[29] Editores do Atractor, Jogo de Sperner, *Gazeta da Matemática* 159 (2009), 3-4.